TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 323, Number 1, January 1991

PURETE, RIGIDITE, ET MORPHISMES ENTIERS

GABRIEL PICAVET

ABSTRACT. Bousfield and Kan have shown that a ring morphism with domain $\mathbf{Z}$ is rigid; we say that a ring morphism is rigid if it admits a factorization by an epimorphism, followed by a pure morphism. A ring A is said to be rigid if every morphism with domain A is a rigid one. Our principal results are: the rigid domains are the Prüferian rings A, with $\mathrm{Dim}(A) \leq 1$, and the Noetherian rigid rings are the Z.P.I. rings. The quasi-compact open sets of an affine rigid scheme, having as underlying ring a domain or a Noetherian ring, are affine and schematically dense if they contain the assassin of the ring. Every injective integral ring morphism with rigid domain is a pure morphism. We give two criteria of purity for integral injective morphisms. As a consequence of these results we obtain the following properties: if A is a normal ring, containing the field of rationals, or is a regular ring, containing a field, every injective integral morphism with domain A is a pure one. For a reduced ring, we define the category of reduced modules and show that any injective integral morphism is pure with respect to the category of the reduced modules.

INTRODUCTION

Un morphisme d'anneaux admet en général d'autres factorisations que la canonique, insuffisante pour l'étude de certains problèmes. Dans un article précédent [24], nous avons montré en particulier que tout morphisme d'anneaux se factorise en un morphisme pur, suivi d'une immersion ouverte, c'est à dire un épimorphisme plat de présentation finie. On se propose ici d'examiner la classe des morphismes d'anneaux, se factorisant en un épimorphisme, suivi d'un morphisme pur. Il peut paraître surprenant qu'il existe des anneaux A tels que tout morphisme d'anneaux $A \to B$ se factorise en un épimorphisme suivi d'un morphisme pur. Le premier, et seul exemple connu, fut donné par A. K. Bousfield et D. M. Kan dans [3]: l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs. Nous disons qu'un morphisme d'anneaux est rigide s'il se factorise en un épimorphisme suivi d'un morphisme pur. Un anneau est dit rigide si tout morphisme de source cet anneau est rigide. La classe des morphismes rigides a une bonne stabilité, en particulier elle est stable par localisation et globalisation, produit, limite inductive, changement de base. Son seul défaut est de ne pas être stable par composition. Après l'étude préliminaire des propriétés des morphismes rigides, on généralise le résultat de [3], cité ci-dessus: tout anneau Prüférien de dimension inférieure ou égale â 1 est rigide. C'est là un résultat fondamental pour

Received by the editors January 13, 1989.
1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 13B02; Secondary 13F05.

la suite. La preuve en est longue et la méthode utilisée entierement différente de celle de [3]. Un paragraphe est consacré à l'étude des propriétés de stabilité des anneaux rigides. Nous en déduisons une caractérisation des anneaux rigides intègres ou Noethériens; bien que nous ayons des renseignements substantiels sur les anneaux rigides, nous n'avons pu trouver une caractérisation complète. Le résultat clé est le suivant: soit A un anneau réduit, rigide, tout morphisme universellement submersif $A \to B$ est pur. On obtient alors les deux théorèmes principaux: un anneau intègre est rigide si et seulement si c'est un anneau de Prüfer, de dimension inférieure ou égale à 1; un anneau Noethérien est rigide si et seulement si c'est un anneau Z.P.I.: tout idéal de l'anneau est un produit d'idéaux premiers. On notera la nature arithmétique des anneaux trouvés. Nous montrons que leurs ouverts quasi-compacts sont des schémas affines, qui sont même schématiquement denses, lorsqu'ils contiennent l'assassin de l'anneau.

Du résultat clé, on déduit que si A est un anneau rigide, tout morphisme entier injectif est pur. Or des exemples similaires, pour certains types d'anneaux, abondent dans la littérature. Nous ajoutons deux exemples: tout morphisme entier injectif, dont la source est soit un anneau régulier contenant un corps, soit un anneau normal, contenant le corps des rationnels, est pur. Ces deux résultats sont obtenus ã l'aide de deux théorèmes de structure des morphismes entiers purs. En fait tout morphisme entier injectif est presque pur: si A est un anneau réduit, soit $P(A)$ l'anneau absolument plat universel associé à A, nous disons qu'un A-module M est réduit si le morphisme $M \to M \otimes_A P(A)$ est injectif. La classe des modules réduits est vaste et a de bonnes propriétés de stabilité. Le théorème obtenu est le suivant: si A est un anneau réduit tout morphisme entier injectif $A \to B$ est pur par rapport à la catégorie des A-modules réduits.

0. Conventions et notations, rappels

De manière générale, les conventions et notations sont celles de N. Bourbaki et des Eléments de Géométrie Algèbrique de J. Dieudonné et A. Grothendieck.

Tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires; les modules sont des modules sur des anneaux commutatifs et unitaires. Lorsque nous parlons d'un anneau de Bezout, ou de Prüfer, ou principal, etc., il s'agit d'un anneau intègre ayant la propriété voulue. Dans le cas d'anneaux non intègres on précise in situ la définition adoptée.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons certains résultats et définitions. On utilise les résultats du Séminaire P. Samuel sur les épimorphismes de la catégorie des anneaux commutatifs unitaires: un morphisme d'anneaux $A \to B$ est un épimorphisme si et seulement si $B \otimes_A B = B$. La notion la plus importante dans ce travail est celle de pureté. Un sous-A-module N d'un A-module M est dit pur dans M (on dit aussi que l'inclusion $N \subset M$ est pure) si pour tout A-module P, le morphisme $P \otimes_A N \to P \otimes_A M$ est injectif. Un morphisme d'anneaux $A \to B$ est dit pur si le A-module A est sous-A-

module pur de B. Il revient au même de dire que le morphisme $A \to B$ est universellement injectif. Notre source principale de résultats sur les morphismes purs est l'article de J. P. Olivier [20]. On utilise principalement le fait que les morphismes purs descendent un bon nombre de propriétés algébriques, par exemple la platitude, la nullité, etc. Par descente d'une propriété de morphismes d'anneaux on entend la situation suivante: un morphisme d'anneaux $A \to B$ est dit descendre la propriété (P) de morphismes d'anneaux si pour tout morphisme d'anneaux $A \to A'$, tel que le morphisme $B \to B \otimes_A A'$ vérifie (P), alors $A \to A'$ vérifie (P).

Une autre notion importante pour ce travail est celle de dominion d'un morphisme d'anneaux $A \to B$: le dominion du morphisme $A \to B$ est l'ensemble des éléments b de B, tels que $b \otimes 1 = 1 \otimes b$, dans $B \otimes_A B$; il est désigné par $D_A(B)$, ou $D(B)$ si aucune confusion ne peut en résulter. On a une factorisation en morphismes d'anneaux $A \to D(B) \to B$. A l'aide du dominion on obtient les caractérisations suivantes: le morphisme $A \to B$ est un épimorphisme si et seulement si $D(B) = B$; un monomorphisme $A \to B$ est strict si et seulement si $A = D(B)$. Rappelons que le morphisme $D(B) \to B$ est strict. On construit dans [24], en itérant par récurrence transfinie l'opération D, un anneau $E_A(B)$ ou $E(B)$, pour tout morphisme d'anneaux $A \to B$. Il en résulte une factorisation en morphismes d'anneaux $A \to E(B) \to B$, où $A \to E(B)$ est un épimorphisme et où le morphisme $E(B) \to B$ est extrémal: un morphisme d'anneaux $A \to B$ est dit extrémal s'il est injectif et si pour toute factorisation $A \to C \to B$, où le morphisme $A \to C$ est un épimorphisme, alors $A \to C$ est un isomorphisme.

Si A est un anneau réduit, on peut construire un morphisme clôture intégrale totale $A \to \Omega(A)$, comme l'ont fait M. Hochster et d'autres (cf. [11]). Ce morphisme est entier essentiel, l'anneau $\Omega(A)$ est un anneau de Baer (l'annulateur de tout idéal est un idéal engendré par un idempotent); de plus il possède la propriété de factorisation linéaire (tout polynôme unitaire à une variable sur l'anneau se factorise en facteurs linéaires). En fait $\Omega(A)$ est totalement intégralement clos (T.I.C.): un anneau T est T.I.C. si pour tout morphisme d'anneaux $A \to T$ et pour tout morphisme d'anneaux entier injectif $A \to B$ il existe une factorisation $A \to B \to T$ de $A \to T$.

Pour terminer ces rappels voici une dernière notion: soit A un anneau, on désigne par $\mathrm{Ass}(A)$ l'assassin de A, c'est à dire l'ensemble des idéaux premiers P de A, tels qu'il existe un élément a de A, satisfaisant: P est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers contenant 0: a. Pour les propriétés de $\mathrm{Ass}(A)$, on réfère le lecteur à l'article de J. Merker [18]. Un anneau local est dit auto-associé si son idéal maximal est dans l'assassin.

I. La classe des morphismes rigides

Nous donnons un lemme, dont les résultats sont certainement classiques.

Lemme 1.1. *Soient $A \to B$ et $B \to C$ des morphismes d'anneaux.*

(a) *Si le morphisme* $B \to C$ *est pur, alors*:

(1) *Le morphisme* $B \to C$ *est pur dans la catégorie des* A*-modules.*

(2) *Le morphisme* $B \otimes_A B \to C \otimes_A C$ *est pur et pur dans la catégorie des* A*-modules.*

(b) *Si le morphisme* $B \to C$ *est pur dans la catégorie des* A*-modules, le morphisme* $B \otimes_A B \to C \otimes_A C$ *est injectif.*

Preuve. Supposons que le morphisme $B \to C$ soit pur et soit M un A-module, le morphisme $B \otimes_A M \to C \otimes_A M$ n'est autre que le morphisme suivant: $B \otimes_B (B \otimes_A M) \to C \otimes_B (B \otimes_A M)$, d'où la preuve de (a)(1). Pour montrer (a)(2), on remarque que le morphisme déduit de $B \to C$ par le changement de base $B \to B \otimes_A B$ est le morphisme $B \otimes_A B \to C \otimes_A B$. Or la pureté est une propriété universelle, donc ce dernier morphisme est pur. On montre de même que le morphisme $C \otimes_A B \to C \otimes_A C$ est pur. La dernière assertion résulte de (a)(1). Si maintenant, le morphisme $B \to C$ est pur dans la catégorie des A-modules, deux tensorisations successives, l'une par B, l'autre par C, sur A, du morphisme $B \to C$ donnent le résultat (b).

Définition 1.2. On dit qu'un morphisme d'anneaux $A \to B$ est rigide si le morphisme $D(B) \to B$ est pur.

Le Lemme 1.1 montre que le morphisme $D(B) \to B$ est pur dans la catégorie des A-modules, lorsque le morphisme $A \to B$ est rigide.

Proposition 1.3. *Soit* $f: A \to B$ *un morphisme d'anneaux.*

(a) *Le morphisme* f *est rigide si et seulement si le morphisme* $D(B) \to B$ *est pur dans la catégorie des* A*-modules.*

(b) *Si le morphisme* f *est rigide, dans la factorisation* $A \to D(B) \to B$, *le premier morphisme est un épimorphisme et le deuxième est un morphisme pur. La factorisation d'un morphisme rigide en un épimorphisme, suivi d'un morphisme pur, est unique à un isomorphisme près.*

(c) *Si le morphisme* f *est rigide et plat, alors le morphisme* $A \to D(B)$ *est un épimorphisme plat et le morphisme* $D(B) \to B$ *est fidèlement plat.*

Preuve. Si le morphisme $D(B) \to B$ est A-pur, d'après le Lemme 1.1, on obtient une injection $D(B) \otimes_A D(B) \to B \otimes_A B$, d'où l'on déduit que $D(D(B)) = D(B)$. Ainsi le morphisme $A \to D(B)$ est un épimorphisme. Soit maintenant un $D(B)$-module M et supposons que le morphisme $D(B) \to B$ soit A-pur; puisque $A \to D(B)$ est un épimorphisme, le morphisme $D(B) \otimes_{D(B)} M \to B \otimes_{D(B)} M$ n'est autre que le morphisme $D(B) \otimes_A M \to B \otimes_A M$, qui est injectif, car le morphisme $D(B) \to B$ est A-pur. Pour achever la preuve de (a) et (b), il reste à montrer l'unicité de la factorisation. Or nous avons montré dans [24] qu'un morphisme pur est extrémal, ainsi que le résultat suivant: si f est un morphisme d'anneaux tel que $f = m \circ e = m' \circ e'$, où m et m' sont des morphismes extrémaux et e et e' des épimorphismes, alors il existe un isomorphisme t tel que $m' = m \circ t$ et $e' = t^{-1} \circ e$. Montrons maintenant (c), si le morphisme f est rigide et plat, la Proposition 3.1 de [16] montre que $D(B) \to B$ est plat, donc fidèlement plat; en effet, un morphisme pur induit une surjection sur les spectres (cf. [20]). Pour voir que $A \to D(B)$ est un morphisme plat, on peut utiliser la proposition suivante, qui ne semble pas connue, bien qu'une preuve ne soit qu'un plagiat de [2, Proposition 7, Chapitre I, §3, No. 4].

Proposition 1.4. *Soit un composé $A \to B \to C$ de morphismes d'anneaux, où le morphisme $A \to C$ est plat (resp. fidélement plat), si le morphisme $B \to C$ est pur, le morphisme $A \to B$ est plat (resp. fidélement plat).*

Preuve. On utilise la notion de module complètement fidèle de F. W. Anderson et K. R. Fuller [1, p. 233, exercice 19]. On constate qu'un morphisme d'anneaux $A \to A'$ définit A' comme un A-module complètement fidèle si et seulement si le morphisme $A \to A'$ est pur. D'après la référence donnée ci-dessus, on a le résultat suivant: soit E un R-module complètement fidèle et soit F un (R, S)-bimodule, pour que le S-module F soit plat (resp. fidèlement plat) il suffit que le S-module $E \otimes_R F$ le soit. La proposition est alors obtenue, à l'aide de l'assertion suivante: soit un morphisme d'anneaux $A \to B$ et soit E un B-module complètement fidèle, pour que le morphisme $A \to B$ soit plat (resp. fidèlement plat) il suffit que le A-module $E_{[A]}$ soit plat (resp. fidèlement plat). Il suffit de prendre B à la place de R, A à la place de S, $E = E$ et $F = B$: supposons en effet que $E \otimes_B B$ soit plat sur A, alors B est plat sur A, de même avec fidèlement plat.

Théorème 1.5. *Soit $f: A \to B$ un morphisme d'anneaux, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Le morphisme f est rigide.*
(2) *Il existe une factorisation $A \to C \to B$, où le morphisme $A \to C$ est un épimorphisme et le morphisme $C \to B$ est pur.*
(3) *Le morphisme $E(B) \to B$ est pur.*

Preuve. La Proposition 1.3 donne: (1) entraîne (2). Supposons (2) vraie, en vertu de [24], il existe une factorisation $A \to C \to E(B) \to B$; mais alors, $C \to E(B)$ est un épimorphisme pur. D'après [27], on a la relation $E(B) \otimes_C E(B)/C = 0$. Or un morphisme pur descend la nullité des modules; donc $E(B) = C$. Il en résulte que (2) entraîne (3). Supposons maintenant que le morphisme $E(B) \to B$ soit pur, la proposition suivante montre que $D_A(B) = D_{E(B)}(B)$. Mais un morphisme pur est strict (cf., par exemple, [24]); il en résulte que $D_{E(B)}(B) = E(B)$. Donc le morphisme $D(B) \to B$ est pur. Ainsi (3) entraîne (1).

Proposition 1.6. *Soit un composé de morphismes d'anneaux $A \to C \to B$.*

(1) *Si le morphisme $A \to C$ est un épimorphisme, alors $D_A(B) = D_C(B)$.*
(2) *Si le morphisme $A \to C$ est un épimorphisme, alors $A \to B$ est un morphisme rigide si et seulement si $C \to B$ est un morphisme rigide.*

Preuve. Si $A \to C$ est un épimorphisme, la relation $B \otimes_A B = B \otimes_C B$ montre (1). Dans ce cas, il est clair aussi que la rigidité de $C \to B$ entraîne la rigidité de $A \to B$. Supposons le morphisme $A \to B$ rigide et que $A \to C$ soit un épimorphisme, alors par (1) on a $D_C(B) = D_A(B)$, donc le morphisme $D_C(B) \to B$ est pur.

On introduit maintenant un foncteur qui nous permettra de préciser le comportement du dominion dans les changements de base. Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux et soit le morphisme de A-modules $j : B \to B \otimes_A B$ défini par $j(b) = b \otimes 1 - 1 \otimes b$; pour tout A-module M on définit $D_A(B, M)$ comme étant le noyau du morphisme $j \otimes 1_M$. Il est facile de voir que $D_A(B, M)$ est un foncteur en M de Mod_A dans Mod_A, qui commute aux limites inductives: en effet $D_A(B, M)$ est un noyau.

Proposition 1.7. *Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux et soit $A \to A'$ un autre morphisme d'anneaux. On désigne par B' l'anneau $B \otimes_A A'$.*

(i) *Si le morphisme $A \to A'$ est plat, alors $D(B) \otimes_A A' = D(B')$.*
(ii) *Si le morphisme $A \to A'$ est pur, le morphisme $D(B) \to D(B')$ est pur dans la catégorie des A-modules.*

Preuve. L'assertion (i) résulte de ce que $D(B)$ est le noyau de j. Supposons le morphisme $A \to A'$ pur. Le foncteur $D_A(B, M)$ commute aux limites inductives. Or, on sait qu'une suite exacte de A-modules $0 \to N \to M \to P \to 0$ est pure si et seulement si elle est limite inductive de suites exactes scindées. On en déduit qu'une inclusion pure est transformée en inclusion pure par le foncteur $D_A(B, M)$. Il en résulte que le morphisme $D_A(B, A) \to D_A(B, A')$ est pur dans Mod_A. Il suffit alors de constater que $D_A(B, A) = D(B)$ et que $D_A(B, A') = D(B')$, pour achever la preuve de (ii).

Proposition 1.8. *Le classe des morphismes rigides est stable par changement de base et les morphismes purs descendent les morphismes rigides.*

Preuve. La première assertion est claire. En reprenant les notations de la Proposition 1.7, supposons le morphisme $A \to A'$ pur et le morphisme $A' \to B'$ rigide. Nous avons une factorisation $D(B) \to B \to B' = D(B) \to D(B') \to B'$; le morphisme $D(B') \to B'$ est pur, donc A-pur, la Proposition 1.7 montre que le morphisme $D(B) \to D(B')$ est A-pur. Il en résulte que le morphisme $D(B) \to B$ est A-pur donc pur. Donc le morphisme $A \to B$ est rigide.

Proposition 1.9. *Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Le morphisme f est rigide si et seulement si pour tout idéal premier P de A, le morphisme f_P est rigide.*

Preuve. La partie directe est claire. La Proposition 1.7 nous montre que $D(B)_P = D(B_P)$. Supposons que pour tout idéal premier P de A le morphisme f_P soit rigide, alors le morphisme $D(B_P) \to B_P$ est A_P-pur, pour tout idéal premier P ; donc le morphisme $D(B) \to B$ est pur, car A-pur (cf. la Proposition 1.3).

Proposition 1.10. *Soit* $\{A_i\}_{i\in I}$ *un système inductif filtrant de* A*-algèbres, dont les morphismes structuraux sont rigides, alors la limite inductive de ce système est une* A*-algèbre dont le morphisme structural est rigide.*

Preuve. Avec les hypothèses de la proposition, on obtient un système inductif filtrant de A-algèbres $\{D(A_i)\}_{i\in I}$, dont la limite est $D(\underrightarrow{\mathrm{Lim}} A_i)$: en effet, si $A \to B$ est un morphisme d'anneaux, l'anneau $D(B)$ est le noyau d'un morphisme de A-modules $B \to B \otimes_A B$. Il suffit, pour terminer, de se rappeler qu'une limite inductive de morphismes purs est un morphisme pur.

Remarque 1.11. La classe des morphismes rigides n'est pas stable par composition. Soit, par exemple un morphisme non rigide (il en existe, comme on le verra au §II), $A \to B$; le morphisme $\mathbf{Z} \to A \to B$ est rigide (cf. l'introduction ou le §II); il en est donc de même pour le morphisme $A \to B \otimes_{\mathbf{Z}} A$; si la classe était stable par composition, le morphisme $A \to B \otimes_{\mathbf{Z}} A \to B$ serait rigide.

Proposition 1.12. *Soit* (P) *une propriété de morphismes d'anneaux telle que*:

(i) *La propriété* (P) *est stable par composition.*
(ii) *Les isomorphismes vérifient* (P).
(iii) *Un morphisme d'anneaux* $A \to B$ *vérifie* (P) *si et seulement si pour tout idéal premier* P *de* A *le morphisme* $A_P \to B_P$ *vérifie* (P).

Alors, si deux morphismes d'anneaux $A \to A'$ *et* $B \to B'$ *vérifient* (P) *il en est de même pour le morphisme* $A \times B \to A' \times B'$.

Preuve. On commence par montrer que si A et B sont des anneaux et si S est une partie multiplicative de A, contenant 1, et T est une partie multiplicative de B, contenant 1 et 0, alors il existe un isomorphisme canonique $(A\times B)_{S\times T} \to A_S$. Soient donc deux morphismes d'anneaux $A \to A'$ et $B \to B'$ vérifiant (P), le résultat sera prouvé si l'on montre que le morphisme $A \times B \to A' \times B$ vérifie (P). Pour cela, il suffit d'établir que tout morphisme obtenu par localisation en un idéal premier de $A \times B$ vérifie (P). Or les idéaux premiers de $A \times B$ sont du type $P \times B$, où P est un idéal premier de A, ou du type $A \times Q$, où Q est un idéal premier de B. On montre alors, sans difficulté, que le morphisme $(A \times B)_{P\times B} \to (A' \times B)_{P\times B}$ s'identifie à $A_P \to A'_P$, donc vérifie (P) et que le morphisme $(A\times B) \to (A'\times B)$ localisé en $A\times Q$ s'identifie à l'identité de B_Q, donc vérifie (P).

Proposition 1.13. *Tout produit fini de morphismes rigides est un morphisme rigide.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la Proposition 1.12: la propriété pour un morphisme d'anneaux d'être un épimorphisme ou un morphisme pur, vérifie les conditions de la Proposition 1.12.

Définition 1.14. Un anneau A est dit pre-auto-injectif si pour tout idéal I non nul de A l'anneau A/I est auto-injectif.

Proposition 1.15. *Soit* A *un anneau pre-auto-injectif, alors tout morphisme d'anneaux* $A \to B$, *non injectif, est rigide.*

Preuve. Soit $A \to A/I \to B$ la factorisation d'un morphisme $A \to B$ de noyau $I \neq 0$. Si l'anneau A est pre-auto-injectif, l'anneau A/I est auto-injectif; il existe donc une rétraction du morphisme $A/I \to B$; il en résulte que ce morphisme est pur.

L'intérêt de la proposition précédente vient de ce que G. B. Klatt et L. S. Levy ont caractérisé les anneaux pre-auto-injectifs dans [14]. Suivant leur terminologie, un anneau est dit de valuation si ses idéaux sont totalement ordonnés; un anneau de valuation linéairement compact, pour la topologie discrète, est dit maximal; un anneau de valuation est dit presque maximal si toute image homomorphe propre de cet anneau est un anneau maximal. Avec ces définitions, les anneaux pre-auto-injectifs sont décrits dans liste suivante:

(1) Un anneau intègre (nécéssairement Prüférien), tel que pour tout idéal maximal M de cet anneau A, l'anneau A_M soit un anneau de valuation presque maximal, et tel que tout idéal soit contenu dans un nombre fini d'idéaux maximaux. De plus $\mathrm{Dim}(A_M) = 1$, pour tout idéal maximal M de A.

(2) Un produit fini d'anneaux de valuation maximaux, ayant un seul idéal premier. Dans ce cas A est auto-injectif.

(3) Un anneau de valuation presque maximal, ayant un seul idéal premier.

(4) Un anneau local dont l'idéal maximal M a une suite de composition de longueur 2 et satisfait $M^2 = 0$.

Notons que si un anneau vérifie les conditions de (2), tout morphisme de source cet anneau est rigide. Dans le paragraphe suivant, on étudie de tels anneaux.

On donne maintenant une application des résultats du paragraphe. Elle sort un peu du cadre de cette étude, mais présente un intérêt.

Proposition 1.16. *Soit A un anneau de valuation de corps des fractions K et d'idéal maximal M. On suppose qu'il existe une famille $\{A_i\}_{i\in I}$ de sous-anneaux Noethériens de A, telle que A soit la réunion filtrante de la famille et telle que, pour tout $i \in I$, le morphisme $A_i \to A$ soit plat. Alors l'anneau A est limite inductive filtrante d'anneaux de valuation discrète, donc est de dimension inférieure ou égale à* 1.

Preuve. Considérons le morphisme plat $A_i \to D_i(A) \to A$. Le morphisme $D_i(A) \to A$ est plat et strict (cf. [16]). Soit K_i le corps des fractions de $D_i(A)$, alors $A \cap K_i = D_i(A)$; en effet si $x = ay$, où x, $y \in D_i(A)$ et $a \in A$, la Proposition 2.22 de [24] montre que $a \in D_i(A)$, puisque le monomorphisme $D_i(A) \to A$ est plat et strict, $D_i(A)$ est un anneau réduit et y est régulier. On en déduit que $D_i(A)$ est un anneau de valuation, d'idéal maximal M_i, au-dessous de M. Mais alors le morphisme $D_i(A) \to A$ est fidèlement plat. Il en résulte que le morphisme $A_i \to D_i(A)$ est plat, donc un épimorphisme plat, d'après la Proposition 3.1 de [16]. On en déduit que l'anneau $D_i(A)$ est Noethérien, en vertu de la Proposition 2.3 de [16].

Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que la famille $\{D_i(A)\}$ est filtrante, pour l'inclusion. Sa réunion est évidemment égale à A, puisqu'il en est de même pour la famille $\{A_i\}$.

II. Le cas fondamental de morphisme rigide—anneaux rigides

On se propose de donner maintenant un exemple fondamental de morphisme rigide. On obtiendra, à partir de cet exemple, une classe d'anneaux ayant la propriété remarquable, décrite dans la définition suivante.

Définition 2.1. Un anneau A est dit rigide si tout morphisme d'anneaux $A \to B$ est rigide.

Il est clair qu'un anneau A est rigide si et seulement si tout morphisme d'anneaux $A \to B$ de présentation finie est rigide (cf. la Proposition 1.10). Cette définition, qui peut paraître à priori drastique, se justifie par le fait que l'anneau $\mathbf{Z}$ est rigide, ainsi qu'il a été dit dans l'introduction.

Pour obtenir d'autres exemples d'anneaux rigides, on peut penser à généraliser convenablement la théorie de [3]. On obtient ainsi, sans trop de difficultés, que tout anneau principal est rigide. Mais la démonstration, qui se fait à l'aide de complexes d'Amitsur, est fortement liée au fait qu'un anneau principal est Noethérien. Aussi nous utiliserons d'autres idées. Pour cela, il est besoin d'établir des résultats ayant un intérêt propre.

On rappelle les définitions suivantes: un anneau est dit pur s'il est sous-anneau pur de tout anneau le contenant; il est dit fortement pur si tout quotient de cet anneau est pur; pour ces définitions, on pourra consulter l'article [17] de D. Lazard et P. Huet, on y trouve, en particulier, le résultat suivant.

Proposition 2.2. *Un anneau A est fortement pur si et seulement si A est un anneau de dimension* 0, *dont tout idéal de type fini est monogène.*

C'est le Théorème 4.1 de [17].

Proposition 2.3. *Soit A un anneau fortement pur, tout morphisme d'anneaux $A \to B$ est rigide.*

Preuve. Soit A un anneau fortement pur, la factorisation canonique de $A \to B$ montre que ce morphisme est rigide.

Proposition 2.4. *Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux, tel que B soit un anneau absolument plat, alors le morphisme $A \to B$ est rigide.*

Preuve. Soit $A \to B$ un tel morphisme et considérons la factorisation canonique $A \to E(B) \to B$. En vertu de la Proposition 19 de [24], l'anneau $E(B)$ est absolument plat, puisque le morphisme $E(B) \to B$ est extrémal. Dans ces conditions, le morphisme $E(B) \to B$ est pur.

Proposition 2.5. *Soit A un anneau localement Bezoutien, tout morphisme d'anneaux $A \to B$ plat est rigide.*

Preuve. On peut supposer que l'anneau A est Bezoutien. Le A-module $B \otimes_A B$ est plat, donc sans torsion. Soit a un élément non nul de A et soit $\overline{b}$ un élément de $B/D(B)$ tel que l'on ait $a\overline{b} = 0$. Alors ab appartient à $D(B)$

entraîne que $a(b \otimes 1 - 1 \otimes b) = 0$, d'où $\overline{b} = 0$. Il en résulte que le morphisme $D(B) \to B$ est pur, puisque le A-module $B/D(B)$ est plat.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat fondamental de ce paragraphe. La preuve en est longue, aussi après en avoir donné l'énoncé, nous donnons une série d'assertions préalables.

Théorème 2.6. *Tout anneau Bezoutien de dimension inférieure ou égale à* 1 *est rigide.*

(A_1) *Soit A un anneau de valuation de dimension* 1 *et soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux, d'idéal de torsion T. Si M est l'idéal maximal de A il existe un élément a de M tel que le corps des fractions de A soit A_a. Alors, le morphisme $A \to B$ n'est pas pur si et seulement si $T + Ba = B$.*

Preuve. D'après [9, II–1.3.1], le morphisme $A \to B$ est pur si et seulement si le couple $0 \subset M$ se remonte en un couple d'idéaux premiers $P' \subset Q'$ de B. Désignons par f le morphisme $A \to B$. La fibre en M de f est ${}^af^{-1}(M) = V(f(a))$, puisqu'un idéal premier de B se contracte en M si et seulement si il contient $f(a)$. D'autre part, l'adhérence de la fibre générique ${}^af^{-1}(0)$ est $V(T)$. Puisque la fibre générique est une partie pro-constructible de $\mathrm{Spec}(B)$, le fermé $V(T)$ est le spécialisé de ${}^af^{-1}(0)$. Tout ce qui précède montre que le morphisme f n'est pas pur si et seulement si $\overline{{}^af^{-1}(0)} \cap {}^af^{-1}(M) = \varnothing$. Une traduction immédiate montre que la condition précédente est équivalente à $B = T + Ba$.

(A_2) *Soit A un anneau de Bezout, une inclusion $M \subset N$ de A-modules est pure si et seulement si pour tout élément a de A on a la relation: $aM = aN \cap M$.*

Preuve. I. Kaplansky a montré dans [13] que lorsque A est un anneau de Bezout, toute matrice sur A peut se mettre sous une forme triangulaire: si X est une matrice à coefficients dans A, il existe une matrice unimodulaire U telle que XU soit triangulaire (en fait, il obtient des résultats plus généraux). Or la pureté, comme on le sait, peut s'exprimer à l'aide d'équations linéaires. Utilisant la réduction à la forme triangulaire de toute matrice sur A, il n'est pas difficile de voir que la pureté de $M \subset N$ équivaut bien à la condition donnée dans (A_2).

Soit A un anneau, si $M \subset N$ est une inclusion de A-modules satisfaisant: pour tout élément a de A on a la relation $aM = aN \cap M$, on dit que l'inclusion est faiblement pure. Bien entendu, la pureté entraîne la pureté faible.

(A_3) *Soit A un anneau de Bezout de dimension* 1, *alors A est un anneau à diviseurs élémentaires, ce qui signifie que pour toute matrice X, à coefficients dans A, il existe des matrices U et V unimodulaires, telles que UXV soit une matrice diagonale.*

Preuve. Il s'agit d'un résultat de I. Kaplansky, publié dans [4, Théorème 3.15].

(A_4) *Soit A un anneau de Bezout de dimension* 1 *et soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux, de dominion D. Alors un élément d de B appartient à D si et seulement* *si* $d = \sum_i x_i a_i y_i$, *,où* $x_i, y_i \in B$ *et* $a_i \in A$ *sont des éléments tels que pour tout indice i on ait* $x_i a_i$ *et* $a_i y_i \in \operatorname{Im}(A \to B)$.

Preuve. Il suffit de reprendre la démonstration de la Proposition 5.1 donnée par H. H. Storrer dans [30].

(A_5) *Soit A un anneau de Bezout de dimension* 1, *soient a et d des éléments non nuls de A, alors il existe des éléments b et c de A tel que* $a = bc$, *satisfaisant* $(b, d) = 1$ *et aucun facteur, non inversible, de c n'est premier avec* d. *De plus il existe un entier* m *et un élément p de A tel que* $pc = d^{m-1}$.

Preuve. La première partie n'est autre que le Théorème 3.15 de [4], cité dans (A_3). Pour montrer la deuxième assertion, on reprend la preuve du résultat de I. Kaplansky cité ci-dessus: on considère la suite d'éléments de A suivante: $a_1 = a(a, d)^{-1}$, $a_2 = a_1(a_1, d)^{-1}$, $a_3 = a_2(a_2, d)^{-1}, \ldots$; pour un entier m on obtient $(a_m, d) = 1$, l'élément c est égal à $(a, d)(a_1, d)\cdots(a_{m-1}, d)$, il est facile de voir que dans ces conditions il existe un élément p de A tel que $pc = d^{m-1}$.

(A_6) *Soit A un anneau de Bezout, de dimension* 1 *et soit* $A \to B$ *un morphisme d'anneaux, de dominion* D. *Supposons que* $ax = b$, *où* $x \in B$, $a, b \in A$, *il existe alors un élément d de D tel que* $ax = ad$.

Preuve. Il s'agit d'un plagiat de la démonstration du Lemme 5.2 de [30]. Cependant, on donne cette preuve car des détails sont différents. Soient donc a, b, x comme indiqué dans l'assertion et soit c un p.g.c.d. de a et b, on a une relation $c = aa' + bb'$, où a' et b' sont des éléments de A. Alors xax est un élément de D, en vertu de (A_4), puisque $ax = b$ est un élément de l'image de A. Par conséquent bx appartient à D. Mais alors $xc = xaa' + xbb'$, on en déduit que $xc \in D$ et de même que ci-dessus que $x^2c \in D$, en effet le morphisme $D \to B$ étant strict, son dominion est D. Une récurrence montre que $x^n c \in D$, pour tout entier $n \geq 1$.

On va prouver qu'il existe des éléments q et r de A et un entier m tels que $d = x^m cr + q \in D$ vérifient la relation voulue $ax = ad$. Pour cela, soit $a = a_1 c$ et soit $b = b_1 c$, et considérons le couple a_1, c; en vertu de (A_5) on peut écrire $c = c_1 c_2$, où $(c_2, a_1) = 1$ et il existe un élément p de A tel que $c_1 p = a_1^{m-1}$; en particulier $cp = a_1^{m-1} c_2$. Puisque a_1 et b_1 d'une part et a_1 et c_2 d'autre part sont premiers entre eux, il en est de même pour a_1 et $b_1^{m-1} c_2$ et on obtient une relation $1 = a_1 a'' + b_1^{m-1} c_2 c''$, où a'', $c'' \in A$. Posons $u = c_2 c''$, $r = pc''$ et $q = b_1 a''$, des relations ci-dessus on tire: $cr = a_1^{m-1} u$ et $b_1 = qa_1 + b_1^m u$. Mais $ax = b$ s'écrit aussi $xa_1 c = b_1 c$, on en déduit que $x^2 a_1^2 c = b_1^2 c$, et, par récurrence, que $x^m a_1^m c = b_1^m c$. Alors $da = (x^m cr + q)a = x^m a_1^{m-1} uca_1 + qa_1 c$, car $cr = a_1^{m-1} u$; on en déduit que $da = b_1^m cu + qa_1 c = b_1 c = b = ax$, car $b_1 = qa_1 + b_1^m u$.

Proposition 2.7. *Soit A un anneau de Bezout de dimension inférieure ou égale à 1, alors tout monomorphisme strict $A \to B$ est pur.*

Preuve. Il suffit de traiter le cas où $\mathrm{Dim}(A) = 1$. En vertu de (A_2) il suffit de montrer que pour tout élément a, non nul de A on a la relation $Aa = A \cap Ba$. Soit donc x un élément de B tel que $ax \in A$, d'après (A_6) il existe un élément d du dominion D de $A \to B$ tel que $ax = ad$. Or le morphisme $A \to B$ est strict, donc d appartient à A. Il en résulte que $Ba \cap A$ est contenu dans Aa.

Donnons la preuve du Théorème 2.6. Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux, où A est un anneau de Bezout, tel que $\mathrm{Dim}(A) \leq 1$. En vertu de la Proposition 1.9, on peut supposer A local, donc que A est un anneau de valuation de dimension 1. Soit $A \to E \to B$ la factorisation du morphisme, à travers le dominion. Le morphisme $A \to E$ est un épimorphisme: il suffit de répéter la démonstration de la Proposition 5.1 de [30]; en effet, le Lemme 5.2 de [30], est l'équivalent de (A_6) dans la situation de 2.6.

On peut supposer de plus que le morphisme $A \to B$ est injectif. Dans le cas contraire, soit $I \neq 0$ le noyau du morphisme, la factorisation $A \to A/I \to B$ nous montre que le morphisme $A \to B$ est rigide: en effet, l'anneau A/I est un anneau fortement pur (cf. 2.2). Le morphisme $A \to E$ étant un épimorphisme et le spectre de A, soit $\mathrm{Spec}(A)$, étant constitué de 0 et de l'idéal maximal M, deux cas peuvent se présenter pour le spectre de E, puisque le morphisme spectral $\mathrm{Spec}(E) \to \mathrm{Spec}(A)$ est injectif: ou bien $\mathrm{Spec}(E)$ a deux éléments, ou bien $\mathrm{Spec}(E)$ est réduit à un élément. Dans le cas où $\mathrm{Spec}(E)$ a deux éléments P et M', nécessairement l'un d'eux, par exemple P se contracte en 0 et donc M' se contracte sur M. Mais alors le couple $P \subset M'$ se contracte sur le couple $0 \subset M$: on en déduit que le morphisme $A \to E$ est pur (cf. [9, II–1.3.1]). Or un épimorphisme pur est un isomorphisme; on sait, en effet, d'après [27], que $E \otimes_A E/A = 0$, et un morphisme pur descend la nullité des modules. Dans le cas présent le morphisme $A \to B$ est un monomorphisme strict de source un anneau de Bezout A tel que $\mathrm{Dim}(A) \leq 1$, on déduit de 2.7 que le morphisme $A \to B$ est pur donc rigide. Si maintenant, $\mathrm{Spec}(E)$ est réduit à un élément, le couple $0 \subset M$ ne se remonte certainement pas à E, donc le morphisme $A \to E$ n'est pas pur. Soit T son idéal de torsion. Il résulte de (A_1) que l'on a un élément a de A tel que $a \in M$ et tel que le corps des fractions de A soit A_a; de plus $T + Ea = E$. Si M' est l'unique élément de $\mathrm{Spec}(E)$, il ne peut se contracter sur M; en effet, si c'était le cas, puisque T est un idéal de E différent de E, car $A \to E$ est injectif, on voit que T est contenu dans M'; d'autre part, M' se contractant sur M, contient a; on obtient alors une contradiction puisque les relations $T \subset M'$, $a \in M'$ et $T + Ea = E$ sont incompatibles. Par conséquent, M' se contracte en 0 et ne contient donc pas a. Mais, dans ces conditions, l'élément a de A est inversible dans E: on obtient une factorisation $A \to A_a \to E$. En particulier, le morphisme $A \to B$ se factorise en $A \to A_a \to B$, où A_a est un corps. La preuve est alors terminée, puisque $A \to A_a$ est un épimorphisme et le morphisme $A_a \to B$ est pur.

Remarque 2.8. La preuve du Théorème 2.6 montre que lorsque A est un anneau de valuation de dimension 1, si $A \to B$ est un morphisme d'anneaux de dominion D, alors l'épimorphisme $A \to D$ est soit un isomorphisme, soit une surjection, soit une localisation. On en déduit que tout épimorphisme de source A est du type précédent, en effet la factorisation d'un morphisme rigide est unique, à un isomorphisme près.

Proposition 2.9. *Tout anneau de Prüfer, de dimension* 1, *est rigide. En particulier, un anneau de Dedekind est rigide.*

Preuve. Elle est claire, il suffit de localiser.

III. Propriétés des anneaux rigides—caracterisations d'anneaux rigides

On commence par donner des propriétés des anneaux rigides. En particulier on montre leur stabilité par rapport à certaines constructions. Ces résultats permettront ensuite de caractériser des anneaux rigides.

Lemme 3.1. *Soit A un anneau et soit S une partie multiplicative de A. Si $A_S \to B'$ est un morphisme de présentation finie, il existe un morphisme de présentation finie $A \to B$ tel que $B \otimes_A A_S = B'$.*

Preuve. Elle est sans doute bien connue. L'anneau B est égal à l'anneau quotient d'un anneau de polynômes $A_S[X_1, \dots, X_n]$ par un idéal de type fini engendré par $P_1, \dots, P_q$. Mais il existe un élément $s \in S$, tel que, pour $i = 1, \dots, q$, on ait $sP_i = Q_i$ appartenant à $A[X_1, \dots, X_n]$. Il suffit alors de prendre $B = A[X_1, \dots, X_n]/(Q_1, \dots, Q_q)$.

Proposition 3.2. *Soit A un anneau rigide, pour tout épimorphisme plat $A \to B$, l'anneau B est un anneau rigide. En particulier, pour toute partie multiplicative S de A, l'anneau A_S est rigide.*

Preuve. Soit P un idéal premier d'un anneau rigide A, tout morphisme $A_P \to B$ de présentation finie est rigide, en vertu du Lemme 3.1. Donc l'anneau A_P est rigide. Si maintenant, $A \to B$ est un épimorphisme plat, pour tout idéal premier P' de B, se contractant en P dans A, le morphisme $A_P \to B_P$ est un isomorphisme, d'après la Proposition 2.4 de [16]. Donc l'anneau B_P est rigide; l'anneau $B_{P'}$ étant le localisé de B_P par un idéal premier est lui-même rigide. Mais alors, la Proposition 1.9 nous montre que B est rigide: soit en effet un morphisme $B \to B'$, tout localisé en un idéal premier de B étant un morphisme rigide, le morphisme $B \to B'$ est rigide.

Corollaire 3.3. *Un anneau A est rigide si et seulement si pour tout idéal premier P de A l'anneau A_P est rigide.*

Proposition 3.4. *Soit A un anneau rigide, pour tout idéal I de A l'anneau A/I est rigide.*

Preuve. Soit $A/I \to B'$ un morphisme de présentation finie, exactement comme dans le Lemme 3.1, il existe un morphisme de présentation finie $A \to B$ tel que $B' = B \otimes_A A/I$. On termine la preuve de même que dans la Proposition 3.2.

Proposition 3.5. *Une limite inductive filtrante d'anneaux rigides est un anneau rigide.*

Preuve. Soit A un anneau, limite inductive filtrante d'un système inductif d' anneaux $\{A_i\}_{i\in I}$ rigides. Soit $A \to B$ un morphisme de présentation finie, en vertu des E.G.A. [8, IV, 8.8.2], il existe un élément i de I et un morphisme $A_i \to B_i$ de présentation finie, tel que $B = B_i \otimes_{A_i} A$; d'où le résultat, puisque la propriété pour un morphisme d'être rigide est stable par changement de base.

Proposition 3.6. *Tout produit fini d'anneaux rigides est un anneau rigide.*

Preuve. Soient A et B des anneaux rigides et soit

$$A \times B \to (A \times B)[X_1, \dots, X_n]/I$$

un morphisme de présentation finie, donc tel que I soit un idéal de type fini. On sait qu'il existe un isomorphisme canonique f de $(A \times B)[X_1, \dots, X_n]$ dans $A[X_1, \dots, X_n] \times B[X_1, \dots, X_n]$, tel que l'on ait $f(I) = J \times K$, où J et K sont des idéaux de type fini. On en déduit que le morphisme s'identifie au produit de deux morphismes rigides et est donc un morphisme rigide (Proposition 1.13).

Proposition 3.7. *Soit A un anneau rigide, alors:*

(i) *Tout morphisme entier injectif $A \to B$ est pur.*
(ii) *Tout morphisme universellement submersif $A \to B$ tel que, soit A est un anneau réduit, soit $A \to B$ est injectif, est un morphisme pur.*

Preuve. Soit A un anneau rigide et soit $A \to B$ un morphisme entier injectif. La A-algèbre B est limite inductive de A-algèbres B_i, dont les morphismes structuraux sont finis, de présentation finie. Comme la pureté d'un morphisme est stable par passage à la limite inductive, on est ramené au cas d'un morphisme fini injectif $A \to B$. Or un tel morphisme est extrémal. Plus généralement, soit un composé de monomorphismes $A \to B \to C$, où le morphisme $A \to C$ est fini, d'après [28], si C a un système de générateurs à n éléments sur A, alors $D_n(B) = E(B) = A$. Or (cf. partie rappels), le morphisme $E(B) \to B$ est extrémal. Puisqu'un morphisme rigide se factorise en un épimorphisme, suivi d'un morphisme pur, il résulte de la définition d'un morphisme extrémal que le morphisme $A \to B$ est pur.

Soit maintenant un morphisme $A \to B$ universellement submersif et soit $A \to E \to B$ sa factorisation en un épimorphisme suivi d'un morphisme pur. Le morphisme $A \to E$ est alors un épimorphisme universellement submersif, donc un homéomorphisme universel. En particulier, il est universellement fermé, donc est un morphisme entier. Si le morphisme $A \to B$ est injectif, la partie (i) nous montre que le morphisme $A \to E$ est pur et, étant un épimorphisme, est un isomorphisme, par un raisonnement déja fait. Si l'anneau A est réduit, soit I le noyau du morphisme $A \to E$, l'anneau A/I est rigide et le morphisme

$A/I \to E$ est un morphisme entier injectif, donc pur en vertu de (i). Comme ce morphisme est un épimorphisme, c'est un isomorphisme. Mais alors, le morphisme $A \to A/I$ étant spectralement surjectif, on voit que $I \subset \mathrm{Nil}(A) = 0$. Dans les deux cas le morphisme $A \to B$ est pur.

Proposition 3.8. *Soit $A \to A'$ un morphisme d'anneaux descendant la rigidité des morphismes (par exemple, un morphisme pur), si l'anneau A' est rigide il en est de même pour l'anneau A.*

Preuve. Soit $A \to A'$ un morphisme d'anneaux descendant la rigidité, tel que A' soit un anneau rigide. Si $A \to B$ est un morphisme d'anneaux, le morphisme $A' \to B \otimes_A A'$ est rigide, il en est donc de même pour le morphisme $A \to B$.

Nous avons obtenu suffisament de renseignements pour obtenir des caractérisations d'anneaux rigides.

Proposition 3.9. *Tout anneau rigide est intégralement clos.*

Preuve. Soit A un anneau rigide et soit T son anneau total des fractions. Si l'on désigne par $\overline{A}$ la fermeture intégrale de A dans T, pour un élément ab^{-1} de $\overline{A}$ on obtient la relation $b(ab^{-1}) \in b\overline{A} \cap A = Ab$, en vertu de la pureté de $A \to \overline{A}$ (Proposition 3.7). Or b est un élément régulier de A, donc ab^{-1} est un élément de A.

Remarque 3.10. On peut se demander si le résultat suivant est vrai: si A est un anneau rigide, il en est de même pour $A[X]$. Il n'en est rien: soit K un corps, donc un anneau rigide; si le résultat était vrai, par la Proposition 3.4, l'anneau $K[X, Y]/(X^2 - Y^3)$ serait intègre et rigide, donc intégralement clos, ce qui est faux.

Proposition 3.11. *Soit A un anneau rigide et réduit, tout idéal de A est intégralement clos.*

Preuve. La fermeture intégrale d'un idéal I d'un anneau A est l'ensemble $\widehat{I}$ des éléments b de A tels qu'il existe un polynôme $P(X) = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_iX^{n-i} + \cdots + a_n$ où $a_i \in I^i$, pour lequel $P(b) = 0$. On a $I \subset \widehat{I}$ et I est dit intégralement clos si $I = \widehat{I}$. Soit, tout d'abord, un idéal de type fini $I = (a_1, \dots, a_n)$ de A où A est un anneau rigide et réduit. Nous avons prouvé dans [22, I, 41], que si a est un élément de A, appartenant à $\widehat{I}$, le morphisme $A \to A[X]/(f(X))$, où $f(X) = a + a_1X + \cdots + a_nX^n$, est universellement submersif. Il résulte de la Proposition 3.7 qu'un tel morphisme est pur. Si l'on fait le changement de base $A \to B = A/I$, le morphisme devient $B \to B[X]/(\overline{a})$. Puisque ce dernier morphisme est injectif, on voit que $a \in I$. Si maintenant, l'idéal I n'est pas de type fini, soit a un élément de $\widehat{I}$, il existe un idéal J de type fini tel que J soit contenu dans I et $a \in \widehat{J} = J$. Il en résulte que $I = \widehat{I}$.

Voici un lemme, bien connu dans le cas où le spectre minimal d'un anneau est fini.

Lemme 3.12. *Soit A un anneau et soit I un idéal de A. Pour tout idéal premier minimal m de A, on désigne par $I(m)$ l'idéal IA/m de A/m et par f_m la surjection canonique $A \to A/m$. On a alors la relation suivante: $\widehat{I}$ est égal à l'intersection des idéaux $f_m^{-1}(\widehat{I(m)})$, pour $m \in \operatorname{Min}(A)$.*

Preuve. Le résultat suivant est bien connu: si $f: A \to A'$ est un morphisme d'anneaux et si x est un élément de A', pour que x soit entier sur A il faut et il suffit que pour tout idéal premier minimal m de A' l'élément $\overline{x}$ de A'/m soit entier sur A. Ceci étant dit, rappelons-nous qu'un élément b de A appartient à $\widehat{I}$ si et seulement si bX est entier sur l'anneau de Rees suivant: $A_I = A + IX + I^2X^2 + \cdots + I^nX^n + \cdots$. Supposons que b soit un élément de A tel que $f_m(b) \in \widehat{I(m)}$, pour tout idéal premier minimal de A, alors $f_m(b)X$ est entier sur $A/m_{I(m)}$. Or un idéal premier minimal de $A[X]$ est de la forme $m[X]$, où m est un idéal premier minimal de A. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A_I & \longrightarrow & A[X] \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow \\ A/m_{I(m)} & \longrightarrow & A/m[X] \end{array}$$

le morphisme g est surjectif, l'élément $f_m(b)X$ de $A/m[X]$ est entier sur $A/m_{I(m)}$, donc sur A_1 ; le début de la preuve nous montre que bX est entier sur A_I, donc que $b \in \widehat{I}$. On a donc montré une inclusion, l'autre est évidente.

Conformément à la définition de M. D. Larsen et P. J. McCarthy dans [15], nous dirons qu'un anneau A est de Prüfer si tout idéal de type fini et régulier de A est inversible. Si A est un anneau intègre, on retrouve la définition classique, en remplaçant les mots idéal régulier par idéal non nul. Le Théorème 10.18 de [15] nous assure qu'un anneau A est de Prüfer si tout idéal de type fini, régulier, est simplifiable dans le monoïde des idéaux de A, et réciproquement.

Proposition 3.13. *Soit A un anneau réduit et rigide, alors A est un anneau de Prüfer.*

Preuve. Supposons la proposition démontrée lorsque A est un anneau intègre. Soient J et K des idéaux d'un anneau réduit et rigide et soit I un idéal de type fini et régulier de A, tel que $IJ = IK$. Pour tout idéal premier minimal m de A, on a alors $I(m)J(m) = I(m)K(m)$, où $I(m)$ est un idéal non nul de A/m. Or, puisque A est un anneau rigide, l'anneau A/m est rigide et intègre. Avec l'hypothèse faite ci-dessus, A/m est un anneau de Prüfer. On en déduit que $J(m) = K(m)$. Compte tenu de 3.12, on en déduit que $\widehat{J} = \widehat{K}$; puis, en vertu de 3.11 que $J = K$. Donc A est un anneau de Prüfer.

On voit donc qu'il suffit de montrer qu'un anneau intègre et rigide est un anneau de Prüfer, au sens classique.

Soit donc A un anneau intègre et rigide. On adopte les définitions suivantes de [7, Chapitre V]: soit A un anneau intègre, intégralement clos et soit $\{V_i\}$

la famille des sur-anneaux de valuation de A, si I est un idéal de A, on pose $I^b = \bigcap IV_t$. Il est bien connu que $I^b \cap A = \widehat{I}$. Dans le cas qui nous occupe, l'anneau A est intégralement clos (cf. Proposition 3.9) et tout idéal de A est intégralement clos. D'après le Lemme 32.6 de [7, Chapitre V], si $f(X)$ et $g(X)$ sont des polynômes de $A[X]$, désignant par $c(f(X))$ le contenu du polynôme $f(X)$, on a la relation suivante: $c(f(X))^b c(g(X))^b = c(f(X)g(X))^b$. Puisque pour tout idéal I de A on aussi la relation $I^b \cap A = I$, on déduit des relations $(I \cdot J)^b = (I^b \cdot J^b)^b$ et $(I^b)^b = I^b$ (cf. [7]), que pour tout couple $f(X)$, $g(X)$ de polynômes de $A[X]$ on a $c(f(X))c(g(X)) = c(f(X)g(X))$. Le Théorème 28.6 de [7, Chapitre IV], nous permet d'affirmer que l'anneau A est de Prüfer.

Proposition 3.14. *Tout anneau réduit et rigide est un anneau de Prüfer de dimension inférieure ou égale à* 1.

Preuve. On peut supposer que A est un anneau intègre et local rigide, donc est un anneau de valuation, en vertu des résultats précédents. Si la dimension de A est supérieure ou égale à 2, soit M son idéal maximal et soit P un idéal premier de A, contenu strictement dans M et différent de 0. Soient s un élément, non nul de A, tel que $s \in P$, et t un élément de A appartenant à $M - P$. Alors s et t sont des éléments de A, non nuls ni inversibles, tels que $V(s) \cap D(t)$ soit non vide. Il résulte du Corollaire I,33 de [22], que le morphisme $A \to A[X]/(s(1-tX))$ est universellement submersif, mais ne peut être pur. Ce dernier fait contredit la Proposition 3.7. Ainsi la dimension de A est inférieure ou égale à 1.

Remarque 3.15. Nous n'avons pu obtenir davantage de précisions sur les anneaux réduits et rigides quelconques. Cependant, les résultats obtenus permettent une caractérisation des anneaux rigides qui sont soit intègres, soit Noethériens. On peut toutefois remarquer qu'un anneau réduit et rigide n'est pas un anneau de Prüfer quelconque: soit A un tel anneau, pour tout idéal premier P de A, l'anneau A_p est encore réduit et rigide, donc Prüférien. Soit K l'anneau total des fractions de A_P, et désignons par M l'idéal maximal de $A_P = R$. On peut construire l'anneau large des fractions de R selon M: il est désigné par $R_{[M]}$ et est égal à l'ensemble des éléments x de K pour lesquels $xs \in R$, pour un élément $s \in R - M$. L'anneau $R_{[M]} = R'$ a un idéal premier M' et il existe un morphisme d'anneaux $R \to R'$ pour lequel M' est au-dessus de M (cf. [15, Chapitre X]). Mais R est un anneau de Prüfer, tout sur-anneau, contenu dans K est un R-module plat, d'après 10.18 de [15]. On a donc la situation $R \to R' \to K$, où le morphisme composé est un épimorphisme plat injectif. Le morphisme $R \to R'$ étant plat, il résulte de 3.2 de [16], que $R \to R'$ est un épimorphisme plat injectif. Puisque R est un anneau local d'idéal maximal M se remontant dans R', le morphisme $R \to R'$ est fidèlement plat et un épimorphisme, donc un isomorphisme. Le Théorème 10.18 de [15] nous dit alors que A_P est un anneau de valuation au sens de Manis. Nous ne poursuivons pas dans cette voie, car les conditions suffisantes pour obtenir des anneaux rigides ont été obtenues dans le §II, pour des anneaux intègres.

Théorème 3.16. *Soit A un anneau intègre, alors A est un anneau rigide si et seulement si A est un anneau de Prüfer, tel que* $\mathrm{Dim}(A) \leq 1$.

Preuve. Une partie de la preuve est la Proposition 3.14. Pour la réciproque, soit A un anneau de Prüfer, tel que $\mathrm{Dim}(A) \leq 1$, par localisation en un idéal premier P , on obtient un anneau de valuation A_P de dimension inférieure ou égale à 1. D'après 2.6, l'anneau A_P est rigide, il en est donc de même pour l'anneau A .

Corollaire 3.17. *Soit A un anneau intègre et Noethérien, alors A est un anneau rigide si et seulement si A est un anneau de Dedekind, ou un corps.*

Théorème 3.18. *Soit A un anneau, alors*

(i) *Si tout idéal de A est principal, l'anneau A est rigide.*

(ii) *Si tout idéal de A est produit d'idéaux premiers (A est un anneau Z.P.I.; cf.* [15]), *l'anneau A est rigide.*

(iii) *Si tout idéal de A, ayant pour racine un idéal premier, est une puissance de cet idéal premier (A est un anneau A.M.; cf.* [15]), *alors A est un anneau rigide.*

Preuve. Il est bien connu qu'un anneau, dont tout idéal est principal, est un produit fini d'anneaux, qui sont ou principaux ou de dimension 0 à idéaux principaux. Ce dernier type d'anneaux est fortement pur, donc rigide, d'après la Proposition 2.3. Il suffit alors de se rappeler que tout produit fini d'anneaux rigides est un anneau rigide, pour obtenir (i). Soit A un anneau Z.P.I., en vertu de 9.10 de [15], un tel anneau est un produit fini d'anneaux de Dedekind et d'anneaux spéciaux primaires. Or un anneau spécial primaire, intervenant dans une décomposition d'un anneau Z.P.I., est Noethérien, puisqu'il en est ainsi d'un anneau Z.P.I. Comme un tel anneau est local et tel que tout idéal soit une puissance de l'idéal maximal, ses idéaux sont principaux. Donc un anneau Z.P.I. est un produit fini d'anneaux rigides. Ainsi le cas (ii) est démontré. Supposons maintenant que A soit un anneau A.M., les Théorèmes 9.23 et 9.27 de [15], nous assurent que pour tout idéal premier P de A l'anneau A_P est Z.P.I., donc rigide. Il en résulte que l'anneau A est lui-même rigide, par 3.3.

Remarque 3.19. Un anneau A.M. n'est pas forcément Noethérien. On peut voir dans [15] qu'un anneau A.M. Noethérien est un anneau Z.P.I. Le résultat précédent fournit le maximum d'exemples d'anneaux rigides obtenus à partir de 2.6, en utilisant localisations et produits. En effet, un produit d'anneaux A.M. est un anneau A.M., puisque cette propriété équivaut à la propriété Z.P.I. localement (cf. la preuve de 1.12).

Théorème 3.20. *Soit A un anneau Noethérien, alors l'anneau A est rigide si et seulement si A est un anneau Z.P.I.*

Preuve. Il suffit de montrer qu'un anneau Noethérien rigide est un anneau Z.P.I.; pour cela il nous suffit de le montrer pour tout localisé en un idéal premier de l'anneau (cf. Chapitre IX de [15]). On peut donc supposer l'anneau A local. Il est alors tel que $\mathrm{Dim}(A) \leq 1$. Si la dimension de A est 0, l'anneau A est Artinien rigide. Il en est de même pour tout quotient de A. Dans ce cas, puisque tout épimorphisme de source un anneau Artinien est surjectif, l'anneau A est fortement pur (cf. [17]). Mais alors, on sait par la Proposition 3.7 de [17], que A est un anneau local principal Artinien, donc tout idéal est une puissance de l'idéal maximal de A: en effet, l'anneau A est alors un anneau à idéaux principaux, spécial.

Supposons maintenant que la dimension de A soit égale à 1 et soit M son idéal maximal. Alors M^2 n'est contenu dans aucun idéal premier minimal de A. L'anneau A/M^2 est Artinien rigide, donc fortement pur, ainsi qu'on vient de le voir dans le premier cas. On en déduit qu'entre M et M^2 il n'y a pas d'idéal autre que M ou M^2: en effet, dans A/M^2 tout idéal est une puissance de M/M^2. Dans ces conditions, l'anneau A est Z.P.I. [15, Proposition 9.10].

Pour résumer, les exemples d'anneaux rigides obtenus sont les suivants: les anneaux fortement purs, les anneaux à idéaux principaux, les anneaux A.M. ou Z.P.I., les anneaux de Prüfer (intègres) de dimension inférieure ou égale à 1. Comme exemple plus concret, l'anneau des entiers algébriques est rigide. Pour compléter, nous allons examiner dans quel cas un anneau factoriel est rigide.

Définition 3.21. Soit un morphisme d'anneaux, injectif, $A \to B$. On dit que ce morphisme est inerte si toute relation $bc \in A$, où b, $c \in B - \{0\}$ entraîne b et $c \in A$.

P. M. Cohn a montré dans [6] que pour tout anneau à p.g.c.d. A (resp. factoriel), il existe un morphisme d'anneaux inerte $A \to B$, où B est un anneau de Bezout (resp. principal). En fait ce morphisme est plat; pour le voir, il suffit de considérer la première étape de la construction: soient a et b des éléments de A, dont un p.g.c.d. est égal à 1 et soit $f = aX - bY$ un élément de $S = A[X, Y]$. La première étape de la construction est l'anneau $S_{(f)}$ constitué des éléments homogènes de degré 0 de S_f. On obtient un morphisme plat $A \to S_{(f)}$; en effet, d'après les E.G.A. [8, II,2.2], lorsque f est un polynôme homogène de degrè d, le morphisme $S_{(f)} \to S_f^{(d)}$ est libre. Or ici $d = 1$, la factorisation $A \to S_{(f)} \to S_f$ et la platitude du composé entraînent que le morphisme $A \to S_{(f)}$ est plat.

Lemme 3.22. *Un épimorphisme plat et inerte est un isomorphisme.*

Preuve. Soit $A \to A'$ un tel morphisme et soit a' un élément non nul de A'. On sait que $A'a' = A' \cdot (A \cap A'a')$; il existe donc un élément a de A, non nul, tel que $a = a'b'$. Par inertie, a' est un élément de A.

Proposition 3.23. *Soit A un anneau; alors*

(i) *L'anneau A est factoriel rigide si et seulement si il est principal.*
(ii) *Si A est un anneau à p.g.c.d. rigide, alors A est un anneau Prüférien.*

Preuve. Dans les deux cas, soit le morphisme de P. M. Cohn $A \to B$. Il est plat et inerte; si de plus l'anneau A est rigide, le morphisme $A \to B$ se factorise en un épimorphisme plat injectif, suivi d'un morphisme fidèlement plat. Il résulte de 3.22 que le morphisme $A \to B$ est fidèlement plat. Dans le cas où A est factoriel, l'anneau B est principal. On en déduit que l'anneau A est Noethérien factoriel, de dimension inférieure ou égale à 1. L'anneau A est donc principal. Si maintenant l'anneau A est à p.g.c.d., l'anneau B est Bezoutien. Soit I un idéal de type fini de A, alors $I \otimes_A B = IB$ est principal, donc libre. Par descente fidèlement plate, l'idéal I est plat. Dans ces conditions tout idéal de type fini d'un anneau A_P, où P est un idéal premier de A, est libre, donc principal. L'anneau A est donc localement Bezoutien, donc localement Prüférien.

Proposition 3.24. *Soit A un anneau intègre et rigide (donc Prüférien, de dimension inférieure ou égale à* 1) *et soit $A \to A'$ un morphisme injectif de conducteur $I \neq 0$, alors $A \to A'$ est un morphisme pur.*

Preuve. Nous avons montré dans [22, Lemme I, 53], que le morphisme $A \to A' \times A/I$ est universellement submersif, donc pur d'après 3.7. Puisque I est non nul, pour tout idéal maximal P de A, on a $I_P \neq 0$: en effet $I = \bigcap I_P$. On en déduit que le conducteur de $A_P \to A'_P$ est non nul. On peut donc supposer A local, c'est à dire de valuation, d'idéal maximal M. Puisque $A \to A' \times A/I$ est pur, le couple $0 \subset M$ se remonte en un couple $P \subset Q$. Compte tenu de la forme des idéaux premiers d'un produit, le couple $P \subset Q$ ne peut se trouver que dans A', ou dans A/I. Dans le deuxième cas, le conducteur est nul, ce qui est absurde. Donc le couple $0 \subset M$ se remonte en un couple $P \subset Q$ de A'. Il résulte de [9, II, 1.3.1], que le morphisme $A \to A'$ est pur.

Voici quelques précisions concernant l'épimorphisme plat injectif maximal d'un anneau rigide. Cette notion fut introduite par D. Lazard dans [16]. Dans le cas où $\mathrm{Ass}(A)$ est fini, pour un anneau A quelconque, on sait que l'épimorphisme plat injectif maximal $A \to M(A)$ s'identifie à $A \to \mathrm{Tot}(A)$. Ce cas recouvre les deux cas où nous avons caractérisé les anneaux rigides A: l'anneau A est Noethérien ou intègre. Nous avons montré dans [23] les résultats suivants: soit A un anneau et soit dans $\mathrm{Spec}(A)$ le générisé quasi-compact X de $\mathrm{Ass}(A)$, il existe alors un morphisme injectif d'anneaux plat $A \to X(A)$ tel que l'on ait la factorisation $A \to M(A) \to X(A)$. L'anneau $X(A)$ est le localisé de l'anneau $A[T]$ par une partie multiplicative. De plus $M(A)$ est contenu dans le sous-anneau M_1 de $X(A)$, constitué des éléments b de $X(A)$ tels que $(A{:}b)_A \cdot X(A) = X(A)$.

Proposition 3.25. *Soit A un anneau rigide, l'anneau $M(A)$ est le dominion du morphisme $A \to X(A)$. C'est aussi l'ensemble des éléments b de $X(A)$ tels qu'il existe un idéal I de type fini de A, fidèle, pour lequel $Ib \subset A$.*

Preuve. Soit A un anneau rigide, le morphisme $A \to X(A)$ se factorise en $A \to D \to X(A)$, où $A \to D$ est un épimorphisme plat et $D \to X(A)$ est un morphisme fidèlement plat. D'après [23], l'anneau $M(A)$ est un sous-anneau de

$X(A)$, maximal pour la propriété $A \to M(A)$ est un épimorphisme plat injectif. Il en résulte que l'on a la factorisation $D \to M(A) \to X(A)$; puisque $D \to M(A)$ est à la fois un épimorphisme et un morphisme pur, c'est un isomorphisme. Le morphisme $M(A) \to X(A)$ est donc fidèlement plat, donc strict. Soit b un élément de M_1, il existe un idéal de type fini I de A tel que $Ib \subset A$ et $IX(A) = X(A)$. Il résulte de 2.21 de [24] que b appartient à $M(A)$: posons $J = IM(A)$, alors $JX(A) = X(A)$ et $Jb \subset M(A)$, de plus le morphisme $M(A) \to X(A)$ est strict. Il en résulte que $M(A) = M_1$. La dernière partie de l'assertion est alors obtenue en reprenant une partie de la preuve de IV.10 de [24].

IV. La catégorie des schémas affines et les morphismes rigides

On commence par une proposition montrant que la rigidité d'un morphisme d'anneaux a une signification, au niveau de la catégorie des schémas.

Proposition 4.1. *Soit $f: A \to B$ un morphisme d'anneaux rigide, alors* $\mathrm{Spec}(D(B))$ *est le quotient dans la catégorie des schémas de* $\mathrm{Spec}(B)$ *par la relation d'équivalence définie par f.*

Preuve. Le morphisme $D(B) \to B$ est pur, donc submersif (cf. [22] par exemple). Mais il est aussi strict. D'après [20], la suite:

$$\mathrm{Spec}(B \otimes_{D(B)} B) \rightrightarrows \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(D(B))$$

est exacte dans la catégorie des schémas, d'où le résultat.

Rappelons que M. Raynaud a défini dans [26] une partie X du spectre d'un anneau A comme étant admissible s'il existe un épimorphisme plat $A \to E$, tel que l'image de $\mathrm{Spec}(E)$ dans $\mathrm{Spec}(A)$ soit égale à X. Une telle partie est évidemment quasi-compacte et stable par générisation.

D'autre part, soit A un anneau et soit $U = D(a_1, \ldots, a_n)$ un ouvert quasi-compact de $\mathrm{Spec}(A)$, il est bien connu que l'anneau des sections $\Gamma(U)$ s'obtient comme le dominion du morphisme $A \to B_U$, où l'anneau B_U est

$$A[X_1, \ldots, X_n]/(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n - 1).$$

Le morphisme $A \to B_U$ est plat de présentation finie et d'image spectrale U.

Proposition 4.2. *Soit A un anneau, pour que tout morphisme plat de présentation finie $A \to B$ soit rigide, il faut et il suffit que toute partie quasi-compacte et stable par générisation de* $\mathrm{Spec}(A)$ *soit admissible.*

Preuve. Supposons que tout morphisme plat de présentation finie, de source A, soit rigide. Il en est alors de même pour tout morphisme $A \to B_U$. La Proposition 1.3 montre que le morphisme $A \to D(B_U)$ est un épimorphisme plat, d'image spectrale U dans $\mathrm{Spec}(A)$: le morphisme spectral associé à $D(B_U) \to B_U$ est surjectif. Donc tout ouvert U quasi-compact est admissible. Si maintenant X est une partie de $\mathrm{Spec}(A)$, quasi-compacte, stable par générisation, alors X est l'intersection des ouverts quasi-compacts contenant X. Soit P l'algèbre produit tensoriel sur A des anneaux $D(B_U)$, où U parcourt l'ensemble des ouverts quasi-compacts, contenant X. Le morphisme $A \to P$ est un épimorphisme plat d'image spectrale X.

Réciproquement, soit A un anneau tel que toute partie quasi-compacte, stable par générisation, soit admissible. Si $A \to B$ est un morphisme plat de présentation finie, l'image X de $\operatorname{Spec}(B)$ dans $\operatorname{Spec}(A)$ est un ouvert quasi-compact, donc admissible. Il existe donc un épimorphisme plat $A \to E$, dont l'image spectrale dans $\operatorname{Spec}(A)$ est X. Soit B' l'anneau $B \otimes_A E$. Le morphisme $B \to B'$ est un épimorphisme plat dont le morphisme spectral est surjectif: en effet, l'application $\operatorname{Spec}(B') \to \operatorname{Spec}(B) \times_{\operatorname{Spec}(A)} \operatorname{Spec}(E)$ est surjective. Par conséquent, le morphisme $B \to B'$ est un isomorphisme. On en déduit l'existence d'une factorisation $A \to E' \to B$, où le morphisme $A \to E'$ est un épimorphisme et où $E' \to B$ est une injection. Mais, le morphisme $A \to B$ est plat, on déduit de la Proposition 3.1 de [16] que le morphisme $E' \to B$ est plat. Comme l'image spectrale de E' dans A est contenue dans X et puisque le morphisme spectral associé à $A \to E'$ est injectif, on voit finalement que le morphisme $E' \to B$ est fidèlement plat: le morphisme $A \to B$ est rigide.

Théorème 4.3. *Toute partie quasi-compacte stable par générisation du spectre d'un anneau rigide est admissible.*

Preuve. Evidente, compte tenu de 4.2.

Dans le cas où l'anneau A est rigide Noethérien ou intègre, nous pouvons aller plus loin; généralisant ainsi un résultat de D. Lazard dans [16, Corollaire 4.8]: tout ouvert d'un anneau de Dedekind est affine.

Théorème 4.4. *Soit A un anneau rigide. Si A est Noethérien ou intègre, tout ouvert quasi-compact de* $\operatorname{Spec}(A)$ *est affine.*

Preuve. Soit U un ouvert quasi-compact de $\operatorname{Spec}(A)$, où A est un anneau rigide Noethérien ou intègre. Pour montrer que U est un ouvert affine, il suffit de prouver que le morphisme $A \to D(B_U)$ est une immersion ouverte, ou puisque nous avons affaire à des schémas affines, que ce morphisme est un épimorphisme plat de présentation finie. En raison de la preuve de 4.2, il suffit de montrer que le morphisme $A \to D(B_U)$ est de présentation finie. Considérons la factorisation $A \to D(B_U) \to B_U$; si l'anneau A est Noethérien, il en est de même pour B_U et donc aussi pour $D(B_U)$, puisque le morphisme $D(B_U) \to B_U$ est fidèlement plat; si l'anneau A est intègre, il en est de même pour $\Gamma(U) = D(B_U)$. Dans les deux cas le morphisme $D(B_U) \to B_U$ est de type fini, puisqu'il en est ainsi de $A \to B_U$. Si A est Noethérien, il est clair que $D(B_U) \to B_U$ est de présentation finie; si A est intègre, il résulte de I,3.4.7 de [9] que $D(B_U) \to B_U$ est de présentation finie. Bref, dans les deux cas envisagés, le morphisme $D(B_U) \to B_U$ est fidèlement plat de présentation finie. Le morphisme $A \to B_U$ étant de présentation finie, il résulte de E.G.A. [8, IV, 11.3.17] que le morphisme $A \to D(B_U)$ est de présentation finie, ce qui achève la preuve.

Remarque 4.5. Si A est un anneau de Bezout, tout ouvert quasi-compact de $\mathrm{Spec}(A)$ est affine: pour un tel ouvert U il existe un élément a de A tel que $U = D(a)$. Le Théorème 4.4 ne caractérise donc pas les anneaux rigides, puisqu'il existe des anneaux de Bezout non rigides.

Remarque 4.6. La caractérisation des ouverts affines d'un schéma affine, donnée par M. Hacque dans [10], permet de voir qu'un anneau dont tout ouvert quasi-compact est affine a des propriétés arithmétiques voisines de celles d'un anneau de Dedekind. D'après l'article cité, si A est un anneau, un ouvert $D(f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathrm{Spec}(A)$ est affine si et seulement si l'idéal I engendré par $f_1, \ldots, f_n$ vérifie la condition: soit I_0 l'idéal de A constitué des éléments de A, annulés par une puissance de I et soit $u: A \to A_0 = A/I_0$ le morphisme canonique. Il existe un entier n et une famille $h_1, \ldots, h_n$ d'éléments de $\mathrm{Hom}_A(I^n, A_0)$, telle que pour tout élément x de I^n on ait $u(x) = \sum_{i=1,\ldots,n} h_i(x)u(f_i)$. Si l'anneau A est intègre et si $n = 1$, on retrouve exactement la définition d'un idéal projectif.

Dans le cas où l'anneau A est Noethérien et intègre, on peut préciser la Proposition 4.2 comme suit:

Proposition 4.7. *Soit A un anneau Noethérien intègre. Tout ouvert U de* $\mathrm{Spec}(A)$ *est affine si et seulement si tout morphisme $A \to B_U$ est rigide.*

Preuve. Si l'on suppose que tout morphisme $A \to B_U$ est rigide, il suffit de reprendre la première partie de la preuve de 4.4 pour obtenir une implication. Réciproquement, supposons tout ouvert de $\mathrm{Spec}(A)$ affine, en vertu de 4.3 de [16], pour tout ouvert U de $\mathrm{Spec}(A)$, le morphisme $A \to D(B_U)$ est plat. Toujours d'après [16, 3.1], le morphisme $A \to D(B_U)$ est un épimorphisme plat et le morphisme $D(B_U) \to B_U$ est plat. En fait ce dernier morphisme est fidèlement plat: en effet, par 4.4 de [16], l'image spectrale de $\mathrm{Spec}(D(B_U))$ dans $\mathrm{Spec}(A)$ est U, il en est de même pour $\mathrm{Spec}(B_U)$ et le morphisme spectral associé à $A \to D(B_U)$ est injectif. Ainsi le morphisme $A \to B_U$ est rigide.

M. Raynaud a montré dans [26, 3.4], que sous certaines hypothèses, un morphisme entier injectif a une propriété de submersivité par rapport aux parties admissibles. La proposition suivante montre qu'il en est de même pour les morphismes purs.

Proposition 4.8. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme pur et soit ${}^a f$ le morphisme spectral. Soit X une partie de* $\mathrm{Spec}(A)$ *telle que ${}^a f^{-1}(X)$ soit admissible, alors X est une partie admissible.*

Preuve. Montrons d'abord que X est une partie quasi-compacte, stable par générisation. Que X soit quasi-compacte est clair, puisque $X = {}^a f({}^a f^{-1}(X))$. On sait d'après [22], que pour tout couple $P \subset Q$ d'idéaux premiers de A il existe un couple $P' \subset Q'$ d'idéaux premiers de A', au-dessus de $P \subset Q$. Soit P un élément de X et soit $Q \subset P$, il existe donc un couple $Q' \subset P'$ d'idéaux premiers de A', au-dessus de $Q \subset P$. Or P' appartient à ${}^a f^{-1}(X)$, qui est admissible, donc Q' appartient à ${}^a f^{-1}(X)$; on en déduit que Q appartient à X. Ainsi X est stable par générisation. En vertu de 4.1 de [23], il existe un morphisme plat $A \to B$, d'image spectrale X. Soit B' l'anneau $B \otimes_A A'$, en vertu d'un raisonnement déjà fait, puisque l'image spectrale de $\mathrm{Spec}(B')$ dans $\mathrm{Spec}(A')$ est ${}^a f^{-1}(X)$ qui est une partie admissible, le morphisme $A' \to B'$ se factorise en $A' \to E' \to B'$, où $A' \to E'$ est un épimorphisme plat, d'image spectrale ${}^a f^{-1}(X)$. On en déduit que le morphisme $E' \to B'$ est fidèlement plat. Finalement, le morphisme $A' \to B'$ est rigide. Or un morphisme pur descend les morphismes rigides. Donc le morphisme $A \to B$ est rigide et plat. On en déduit qu'il existe un épimorphisme plat $A \to E$ d'image spectrale X. Il en résulte que X est admissible.

On se propose maintenant de montrer que sous certaines hypothèses les ouverts quasi-compacts des schémas affines rigides sont schématiquement denses. Pour cela, on établit un lemme, sans doute bien connu, mais dont nous ne pouvons donner aucune référence.

Lemme 4.9. *Soit (X, O_X) un schéma et soient U un ouvert affine de X et V et W des ouverts affines de X, contenus dans U, alors le diagramme suivant est cocartésien et tous ses morphismes sont des épimorphismes plats de présentation finie:*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U, O_X) & \longrightarrow & \Gamma(W, O_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(V, O_X) & \longrightarrow & \Gamma(W \cap V, O_X) \end{array}$$

Preuve. Soit le morphisme de schémas $(V, O_X|V) \to (U, O_X|U)$, puisque U et V sont des ouverts affines, il provient d'un morphisme d'anneaux $\Gamma(U, O_X) \to \Gamma(V, O_X)$. D'autre part, le morphisme de schémas ci-dessus est une immersion ouverte; en vertu de IV, 17.9.1 de [8], un tel morphisme est un monomorphisme plat, localement de présentation finie. Il en résulte que le morphisme d'anneaux $\Gamma(U, O_X) \to \Gamma(V, O_X)$ est un épimorphisme plat de présentation finie. D'autre part, on sait d'après III, 1.3 de [19], que si $\mathscr{B}$ est une O_X-algèbre cohérente, $V' \subset U'$ étant des ouverts affines, l'anneau $\Gamma(V', \mathscr{B})$ est $\Gamma(V', O_X) \otimes_{\Gamma(U', O_X)} \Gamma(U', \mathscr{B})$. Puisque le morphisme de schémas $V \to U$ est affine, il définit $j_*(O_X|V)$ comme une $O_X|U$-algèbre quasi-cohérente, où j désigne l'inclusion $V \subset U$. Il suffit alors d'appliquer ce qui précède, pour obtenir le résultat.

Lemme 4.10. *Soit A un anneau et soit U un ouvert quasi-compact de* $\mathrm{Spec}(A)$, *le morphisme $A \to B_U$ est injectif si et seulement si le morphisme $A \to D(B_U)$ est injectif. Les conditions précédentes sont encore équivalentes à* $\mathrm{Ass}(A) \subset U$ *ou à $0:(a_1, \ldots, a_n) = 0$ si $U = D(a_1, \ldots, a_n)$.*

Preuve. Que les deux premières conditions soient équivalentes est clair. D'autre part, il résulte de 3.3 de [16], que le morphisme $A \to B_U$ est injectif si et seulement si $\mathrm{Ass}(A)$ est contenu dans l'image de $\mathrm{Spec}(B_U)$ dans $\mathrm{Spec}(A)$, c'est à dire U. D'autre part, si I est un idéal de type fini de A, pour que $0:I \neq 0$ il faut et suffit que I soit contenu dans un élément de $\mathrm{Ass}(A)$. On en déduit que $\mathrm{Ass}(A) \subset D(a_1, \ldots, a_n)$ équivaut à $0:(a_1, \ldots, a_n)$ est nul.

Proposition 4.11. *Soit A un anneau rigide, Noethérien ou intègre et soit U un ouvert quasi-compact, pour que U soit un ouvert schématiquement dense de* $\mathrm{Spec}(A)$ *il faut et il suffit que* $\mathrm{Ass}(A)$ *soit contenu dans U.*

Preuve. La condition est evidemment nécessaire: en effet dire que U est schématiquement dense équivaut à dire que le morphisme $O_{\mathrm{Spec}(A)} \to j_*(O_U)$ est injectif, j désignant l'inclusion de U dans $\mathrm{Spec}(A)$. Si maintenant $\mathrm{Ass}(A)$ est contenu dans U, le morphisme $A \to \Gamma(U)$ est injectif et pour tout ouvert V quasi-compact de $\mathrm{Spec}(A)$, il en est de même pour le morphisme $\Gamma(V) \to \Gamma(U \cap V)$, en raison du Lemme 4.9, puisque tout ouvert quasi-compact de $\mathrm{Spec}(A)$ est affine. Dans ces conditions, le morphisme de faisceaux $O_{\mathrm{Spec}(A)} \to j_*(O_U)$ est injectif.

Corollaire 4.12. *Soit A un anneau A.M., pour tout idéal premier P de A, tel que A_P ne soit pas auto-associé, on a* $\mathrm{Prof}(A_P) \geq 1$.

Preuve. Un anneau A.M. est un anneau rigide, tel que pour tout idéal premier P de A l'anneau A_P est Noethérien (cf. Proposition 3.18). Le résultat s'obtient en utilisant IV, 21.13.4 de [8], appliqué à l'anneau Noethérien rigide A_P et à son ouvert $U = \mathrm{Spec}(A_P) - \{PA_P\}$: en effet cet ouvert est schématiquement dense, lorsque A_P n'est pas auto-associé.

V. Purete des morphismes entiers

On sait, d'après les résultats de J. P. Olivier dans [20], que les morphismes purs sont exactement les morphismes qui descendent universellement la platitude. Or L. Gruson et M. Raynaud ont montré dans [9] que les morphismes finis injectifs descendent la platitude. De plus, J. W. Brewer et E. A. Rutter prouvent dans [5] que les morphismes entiers injectifs descendent la platitude des modules de type fini. Nous avons établi dans [22] que certains types de morphismes submersifs (les morphismes universellement subtrusifs) descendent la platitude des modules de type fini, lorsque l'anneau de base est réduit. De plus, il existe un critère valuatif de subtrusivité universelle, faisant le lien avec la pureté. Cet ensemble de faits induit à poser la question suivante: quand un morphisme entier injectif est-il pur?

Les exemples de morphismes entiers purs abondent:

(1) Tout morphisme entier injectif et rigide est pur. En particulier, si A est un anneau rigide, tout morphisme entier injectif $A \to B$ est pur.

(2) Soit A un anneau intègre et intégralement clos, un morphisme $A \to B$ fini, injectif, monogène en tant qu'algèbre, est pur. C'est le Théorème 1.0 de H. Seydi dans [29].

(3) Soit A un anneau de Prüfer, un morphisme entier injectif $A \to B$ est pur. On peut supposer en effet que l'anneau A est de valuation, auquel cas il suffit d'utiliser II, 1.3.1 de [9].

(4) Soit A un anneau régulier, contenant un corps, tout morphisme d'anneaux $A \to B$, de présentation finie en tant que module, injectif, est pur. C'est le Théorème 2 de [12], établi par M. Hochster. La conjecture du facteur direct est que si l'on enlève l'hypothèse: A contient un corps, le résultat ci-dessus est encore vrai.

(5) Soit A un anneau totalement intégralement clos (cf. l'introduction), tout morphisme entier injectif $A \to B$ est pur. En effet, un anneau totalement intégralement clos est un objet injectif, par rapport à la sous-catégorie des morphismes entiers injectifs.

On notera que tous ces exemples ont en commun une propriété de clôture intégrale pour la source.

Proposition 5.1. *Soit $A \to B$ un morphisme entier injectif, alors $A \to B$ est un morphisme pur si et seulement si B est limite inductive de A-algèbres finies dont le morphisme structural a une rétraction dans la catégorie des A-modules.*

Preuve. Une partie est évidente. Supposons que $A \to B$ soit un morphisme entier pur. Alors $B = \varinjlim A_i$, où $A \to A_i$ est un morphisme d'anneaux fini de présentation finie. On sait qu'alors $A \to A_i$ est de présentation finie dans la catégorie des A-modules et est un morphisme pur, puisque l'on a la factorisation $A \to A_i \to B$. Or le résultat suivant est bien connu: si $M' \to M$ est une inclusion pure de A-modules et si l'on a un diagramme commutatif de A-modules

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \longrightarrow & M \end{array}$$

où E est un A-module de type fini et P un A-module de présentation finie, il existe un morphisme de A-modules $P \to M'$ tel que $E \to M' = E \to P \to M'$. On peut alors appliquer ce résultat au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

Corollaire 5.2. *Soit A un anneau régulier contenant un corps, tout morphisme entier injectif $A \to B$ est pur.*

Remarque 5.3. On notera la parfaite analogie de 5.1 avec la notion d'algèbre algèbriquement pure de D. Popescu dans [25]: un morphisme $A \to B$ est dit algébriquement pur si tout système fini d'équations polynômiales, à coefficients dans A, ayant une solution dans B, a une solution dans A. Un morphisme $A \to B$ est algèbriquement pur si et seulement si $B = \varinjlim A_i$, où $A \to A_i$ est un morphisme d'anneaux ayant une rétraction dans la catégorie des anneaux.

Nous allons montrer une forme faible de la conjecture du facteur direct.

Proposition 5.4. *Soit A un anneau factoriel, tout morphisme entier injectif $A \to A'$ est faiblement pur.*

Preuve. Soit $A \to B$ le morphisme de P. M. Cohn (cf. 3.21). Ce morphisme est plat inerte et l'anneau B est principal. Le morphisme $B \to B \otimes_A A'$ est encore entier injectif, donc pur puisque sa source est un anneau rigide. Il est donc faiblement pur. Il suffit donc de montrer que les morphismes inertes descendent les morphismes faiblement purs. Soit donc $f\colon A \to A'$ un morphisme d'anneaux et soit $g\colon A \to B$ un morphisme inerte. Désignons par B' le produit tensoriel de A' avec B sur A et soient les morphismes canoniques $f'\colon B \to B'$ et $g'\colon A' \to B'$. On suppose que le morphisme f' est faiblement pur. On voit déjà que le morphisme f est injectif. Soit a un élément non nul de A et soit x un élément de A, tel que $f(x) \in A'f(a)$, il s'agit de montrer que $x \in Aa$. Des données précédentes, on déduit que $f'(g(x))$ appartient à $B'f'(g(a))$; puisque le morphisme $B \to B'$ est faiblement pur, on obtient que $g(x) \in Bg(a)$. Par inertie du morphisme g, on voit que $x \in Aa$, ce qui termine la preuve.

Soit M un A-module, on désigne par $T(M)$ l'idéal de A engendré par les éléments $h(m)$, où $m \in M$ et $h \in \mathrm{Hom}(M, A)$.

Lemme 5.5. *Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux, injectif, fini, de présentation finie (id est de présentation finie en tant que A-module), les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Le morphisme $A \to B$ est pur.*
(ii) *On a $T(B) = A$.*
(iii) *Le A-module B est un générateur de la catégorie des A-modules.*

Preuve. Si le morphisme $A \to B$ est pur, on a déjà vu que $A \to B$ a une rétraction dans la catégorie des A-modules, donc $T(B) = A$. Réciproquement, si $T(B) = A$, il existe des formes linéaires $h_i\colon B \to A$, des éléments b_i de B tels que $1 = \sum h_i(b_i)$. Cette condition est universelle: soit $A \to C$ un morphisme d'anneaux, et soit h de $\mathrm{Hom}(B, A)$, on définit un élément h' de $\mathrm{Hom}_C(B \otimes_A C, C)$ par le composé $B \otimes_A C \to A \otimes_A C \to C$. Or d'après [20], un morphisme d'anneaux $A \to B$ est pur si et seulement si il vérifie universellement la condition de pureté cyclique: pour tout idéal I de A, on a $IB \cap A = I$. Il suffit donc de montrer que lorsque $T(B) = A$, la condition de pureté cyclique est satisfaite. Soit donc I un idéal de A et soit $a \in IB \cap A$. On obtient deux relations: $a = \sum h_i(ab_i)$ et $a = \sum a_k b'_k$, où $a_k \in I$. Il en résulte que $a = \sum a_k h_i(b_i b'_k)$, donc appartient à I, d'où $IB \cap A = I$. Maintenant, la Proposition 8.21 de [1] nous assure que le A-module B est un générateur si et seulement si $T(B) = A$.

Remarque 5.6. On a déjà remarqué qu'un anneau A, tel que tout morphisme $A \to B$ entier injectif soit pur, est intégralement clos dans son anneau total de fractions.

Dans la démonstration de 5.5 la condition (ii) entraîne la condition (i), sans hypothèse de finitude sur le morphisme $A \to B$; ces deux remarques nous conduisent au résultat suivant.

Proposition 5.7. *Soit A un anneau normal, contenant le corps des rationnels comme sous-anneau, alors tout morphisme entier injectif $A \to B$ est pur.*

Preuve. Par localisation en un idéal premier P de A on peut supposer que A est intègre et intégralement clos. On peut aussi supposer que le morphisme $A \to B$ est fini injectif. On peut encore supposer que B est un anneau intègre: il existe un idéal premier M de B, au-dessus de 0. Dans ces conditions, désignons par K le corps des fractions de A et par L celui de B, alors le morphisme $K \to L$ est fini et définit une extension de corps telle que $[L : K] = n$. Soit t la trace associée à l'extension; si l'on restreint t à B on obtient un élément de $\mathrm{Hom}(B, A)$, puisque l'anneau A est intégralement clos. Or $t(1) = n1_A$, puisque n est inversible dans A on voit que $T(B) = A$, ce qui, compte tenu de la remarque, montre que le morphisme $A \to B$ est pur.

Dans le cas où A est un anneau réduit, on dispose d'un morphisme test de la situation: tout morphisme entier injectif $A \to B$ est pur. Il s'agit du morphisme clôture intégrale totale de M. Hochster dans [11]: si A est un anneau réduit il existe un morphisme entier, injectif et essentiel $A \to \Omega(A)$ où $\Omega(A)$ est un anneau totalement intégralement clos (cf. l'introduction).

Théorème 5.8. *Soit A un anneau réduit, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Le morphisme $A \to \Omega(A)$ est pur.*
(ii) *Tout morphisme entier injectif $A \to B$ est pur.*
(iii) *Il existe un morphisme injectif descendant la pureté des morphismes entiers $A \to B$, où B est un anneau totalement intégralement clos.*
(iv) *Il existe un morphisme pur entier $A \to B$, où B est un anneau totalement intégralement clos.*
(v) *Il existe un morphisme pur $A \to B$, où B est un anneau totalement intégralement clos.*

Preuve. Les implications suivantes sont claires: (ii) entraîne (i), (i) entraîne (iii), (i) entraîne (v) et (v) entraîne (iii). D'autre part (i) entraîne (ii): soit $A \to B$ un morphisme entier injectif, il existe une factorisation $A \to B \to \Omega(A)$. Montrons que (iii) entraîne (iv): soit $A \to B$ un morphisme injectif descendant la pureté des morphismes entiers, où B est un anneau totalement intégralement clos, soit $\overline{A}$ la fermeture intégrale de A dans B, c'est un anneau totalement intégralement clos; le morphisme $B \to B \otimes_A \overline{A}$ est entier injectif et pur, puisque le composé $B \to B \otimes_A \overline{A} \to B$ est l'identité. Enfin (iv) implique (i), puisque l'on a une factorisation $A \to \Omega(A) \to B$, si $A \to B$ est un morphisme pur entier, où B est un anneau totalement intégralement clos.

On se propose de montrer maintenant que les morphismes entiers injectifs, de source un anneau réduit, sont purs par rapport à une catégorie de modules, assez vaste.

Définition 5.9. Soit A un anneau réduit et soit $A \to P(A)$ l'épimorphisme de A dans son anneau absolument plat universel $P(A)$ de J. P. Olivier (cf. [21]). On désigne par (R) la sous-catégorie pleine de la catégorie des A-modules, constituée des A-modules M tels que le morphisme $M \to M \otimes_A P(A)$ soit injectif.

On rappelle que lorsque l'anneau A est réduit le morphisme $A \to P(A)$ est injectif.

La sous-catégorie (R) pourrait s'appeler la sous-catégorie des A-modules réduits. En fait, il existe dans la littérature un grand nombre de notions de A-module réduit; elles ne sont pas équivalentes à celle définie ci-dessus. En particulier, soit $\mathscr{D}$ le site des idéaux denses d'un anneau A réduit, le localisé $Q(A)$ de A par rapport à $\mathscr{D}$ est l'anneau complet des fractions d'Utumi-Lambek. Les modules M sur A, sans $\mathscr{D}$-torsion (i.e., tels que $\mathscr{D}M = 0$) sont dits non singuliers et nous allons voir qu'ils sont dans (R). Dans la suite, on désigne par $S_A(M)$ l'algèbre symétrique d'un A-module M.

Proposition 5.10. *Soit A un anneau réduit et soit* (R) *la sous-catégorie associée.*

(1) *La sous-catégorie* (R) *est stable par sous-module, limite inductive filtrante, sommes directes, produits. Elle contient les A-modules plats, les morphismes d'anneaux à buts réduits, les A-modules non singuliers.*

(2) *Les assertions suivantes impliquent pour un A-module M son appartenance à* (R):

(i) *Le A-module $S_A(M)$ est non singulier.*
(ii) *Le A-module M est non singulier.*
(iii) *Le morphisme $S_A(M) \to S_A(M) \otimes_A Q(A)$ est une injection.*
(iv) *Le morphisme $M \to M \otimes_A Q(A)$ est une injection.*
(v) *L'anneau $S_A(M)$ est réduit.*

(3) *Soit $0 \to P \to N \to M \to 0$ une suite exacte pure, si les A-modules M et P sont dans* (R), *il en est de même pour N.*

Preuve. Une grande partie de (1) est évidente; soit $A \to A'$ un morphisme d'anneaux, où A' est un anneau réduit, il existe une factorisation $A' \to P(A) \otimes_A A' \to P(A')$; l'anneau A' étant réduit, le morphisme $A' \to P(A')$ est injectif; on en déduit que A' est dans (R).

L'assertion (3) se démontre en utilisant le diagramme du serpent. En ce qui concerne (2) il suffit de montrer (v), en effet (i) entraîne (ii) est évident, de même que (iii) implique (iv); que (i) entraîne (iii) et (ii) implique (iv) résulte du fait suivant: l'anneau $Q(A)$ étant absolument plat, il existe une factorisation $A \to P(A) \to Q(A)$; si M est un A-module il existe une factorisation $M \to M \otimes_A Q(A) \to Q(M)$; de plus $\mathscr{D}M$ n'est autre que le noyau de $M \to Q(M)$, donc lorsque M est un A-module non singulier le morphisme $M \to M \otimes_A Q(A)$ est injectif, donc aussi $M \to M \otimes_A P(A)$; de plus (iii) implique (v), en effet si le morphisme $S_A(M) \to S_A(M) \otimes_A Q(A)$ est injectif, on sait que $S_A(M) \otimes_A Q(A)$ est égale à $S_{Q(A)}(M \otimes_A Q(A))$; or $M \otimes_A Q(A)$ est un $Q(A)$-module plat, car

$Q(A)$ est un anneau absolument plat; or l'algèbre symétrique d'un module plat sur un anneau réduit est un anneau réduit: il suffit de considérer le module plat comme limite inductive de A-modules libres de rangs finis et de se rappeler que l'algèbre symétrique d'un module libre est un anneau de polynômes; on en déduit que $S_A(M)$, s'injectant dans un anneau réduit, est un anneau réduit. On déduit de (1) que $S_A(M)$ est dans (R), donc aussi M qui en est un sous-module.

Si A est un anneau, nous désignons par $k(A)$ l'anneau produit des corps résiduels $k(P)$ de A, pour $P \in \mathrm{Spec}(A)$; on désigne encore par $K(A)$ l'anneau produit des corps $K(P)$, où $K(P)$ est une clôture algébrique de $k(P)$.

Lemme 5.11. *Soit M un A-module, le module M est dans la sous-catégorie* (R) *si et seulement si le morphisme $M \to M \otimes_A k(A)$ est injectif.*

Preuve. Il suffit de remarquer que les corps résiduels de A et de $P(A)$ sont les mêmes et que pour un anneau B, désignant par B' l'anneau produit des localisés B_Q, où Q est un idéal maximal de B, le morphisme $B \to B'$ est pur.

Théorème 5.12. *Soit A un anneau réduit, si M est un A-module dans la catégorie* (R), *pour tout morphisme entier injectif $A \to B$, le morphisme $M \to M \otimes_A B$ est injectif.*

Preuve. Puisque tout morphisme entier injectif $A \to B$ se prolonge en un morphisme $A \to \Omega(A)$, il suffit de montrer la proposition pour le morphisme $A \to \Omega(A)$. D'après [11], on peut considérer $\Omega(A)$ comme un sous-anneau de $K(A)$. Mais le morphisme $k(A) \to K(A)$ est pur, car $k(A)$ est un anneau absolument plat et le morphisme est injectif; il est donc A-pur en vertu de 1.1. Le Lemme 5.11 nous assure que pour un module M de (R) le morphisme $M \to M \otimes_A k(A)$ est injectif; il en est donc de même pour $M \to M \otimes_A K(A)$, donc pour $M \to M \otimes_A \Omega(A)$.

Bibliographie

1. F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, and Berlin, 1973.
2. N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Hermann, Paris.
3. A. K. Bousfield and D. M. Kan, *The core of a ring*, J. Pure Appl. Algebra **2** (1972), 73–81.
4. J. W. Brewer, J. W. Bunce, and F. S. Van Vleck, *Linear systems over commutative rings*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., no. 104, Dekker, Basel and New York, 1986.
5. J. W. Brewer and E. A. Rutter, *Descent for flatness*, J. Algebra **22** (1972), 88–96.
6. P. M. Cohn, *Bezout rings and their subrings*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **64** (1968), 251–264.
7. R. Gilmer, *Multiplicative ideal theory*, Dekker, New York, 1972.
8. A. Grothendieck and J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique*. I, II, III, IV, Presses Univ. France, Paris (Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. Nos. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32) 1960, 1967.
9. L. Gruson and M. Raynaud, *Critères de platitude et projectivité*, Invent. Math. **13** (1971), 1–89.
10. M. Hacque, *Localisations et schémas affines*, Publications du Département de Mathématiques de l'Université C. Bernard, Lyon, no. 7, pp. 1–114.

11. M. Hochster, *Totally integrally closed rings and extremal spaces*, Pacific J. Math. **32** (1960), 767–779.

12. ——, *Contracted ideals from integral extensions of regular rings*, Nagoya Math. J. **51** (1973), 25–43.

13. I. Kaplansky, *Elementary divisors and modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 464–491.

14. G. B. Klatt and L. S. Levy, *Pre-self-injective rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **137** (1969), 407–419.

15. M. D. Larsen and P. J. McCarthy, *Multiplicative theory of ideals*, Academic Press, London and New York, 1971.

16. D. Lazard, *Epimorphismes plats*, Séminaire P. Samuel 4, Secrétariat Math., Paris, 1967, 1968.

17. D. Lazard and P. Huet, *Dominions des anneaux commutatifs*, Bull. Sci. Math. **94** (1970), 193–199.

18. J. Merker, *Idéaux faiblement associés*, Bull. Sci. Math. **93** (1969), 15–21.

19. D. Mumford, *Introduction to algebraic geometry*, Preliminary version.

20. J. P. Olivier, *Descente de quelques propriétés élémentaires par morphismes purs*, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Publ. No. 112, Montpellier, 1970, 1971, pp. 47–85.

21. ——, *Anneaux absolument plats et épimorphismes à buts réduits*, Séminaire P. Samuel 6, Secrétariat Math., Paris, 1967, 1968.

22. G. Picavet, *Submersion et descente*, J. Algebra **103** (1986), 527–591.

23. ——, *Propriétés et applications de la notion de contenu*, Comm. Algebra **13** (1985), 2231–2265.

24. ——, *Factorisations de morphismes d'anneaux commutatifs*, Ann. Sci. Univ. B. Pascal (Clermont-Ferrand II) Math. **24** (1987), 33–59.

25. D. Popescu, *Algebraically pure morphisms*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **24** (1979), 947–977.

26. M. Raynaud, *Un critère d'effectivité de descente*, Séminaire P. Samuel 5, Secrétariat Math., Paris, 1967, 1968.

27. N. Roby, *Diverses caractérisations des épimorphismes*, Séminaire P. Samuel 3, Secrétariat Math., Paris, 1967, 1968.

28. D. Sanders, *The dominion and separable subalgebras of finitely generated algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **48** (1975), 1–7.

29. H. Seydi, *Un théorème de descente effective et applications*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A **270** (1970), 801–803.

30. H. H. Storrer, *Epimorphic extensions of non commutative rings*, Comment. Math. Helv. **48** (1973), 72–86.

UNIVERSITE BLAISE PASCAL, U.F.R. SCIENCES, MATHEMATIQUES PURES, 63177 AUBIERE CEDEX, FRANCE